Éléments de géométrie différentielle à l'usage des mécaniciens

Boris Kolev

Résumé

La géométrie différentielle est un outil fondamental en mécanique. Que ce soit dans l'étude du corps rigide ou des structures articulées complexes ou bien dans le cadre de la formulation de la mécanique des milieux continus et de ses cas particuliers (équation des coques, des poutres, des milieux de second gradient, ...).

Ce cours propose d'abord une « mise à niveau » sur les notions essentielles et basiques de la géométrie différentielle. Il vise ensuite à présenter quelques applications probablement moins connues en mécanique. J'évoquerai, d'une part, une approche due à Vladimir Arnold, utilisant les groupes de Lie, et qui donne une vision unifiée des équations d'Euler du mouvement d'un corps rigide et de celles des équations du mouvement d'un fluide idéal. Je présenterai, d'autre part, un *Principe universel de la mécanique*, formulé par Jean-Marie Souriau, qui apparaît comme une alternative au *Principe des puissances virtuelles* et duquel dérive les équations fondamentales de la plupart des modèles de la mécanique des milieux continus.

1 Programme

1. Notions de base de la géométrie différentielle (variétés, fibrés, champs de vecteurs et tenseurs, formes différentielles, métriques) ;
2. Formule de Stokes, divergences, rotationnels et gradients, équations bilans, éléments de théorie de Hodge ;
3. Notions de géométrie Riemannienne, lois de dérivation covariante, éléments de relativité générale Galiléenne et Einsteinienne ;
4. Problèmes variationnels, géodésiques et minimisation ;
5. Groupes de Lie, algèbres de Lie, mouvement du corps rigide, équation d'Euler-Arnold ;
6. Un principe fondamental de la mécanique d'après Jean-Marie Souriau : une alternative au principe des puissances virtuelles.

2 Prérequis

1. Bonnes connaissances en algèbre linéaire ;
2. Notions de base en analyse : dérivées partielles, différentielle d'une application.

Références

- [1] M. Epstein. *The geometrical language of continuum mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [2] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [3] J.-M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques*. Maîtrises de mathématiques. Dunod, Paris, 1970.