Gravitation et tenseurs affines en Mécanique galiléenne

G. de Saxcé

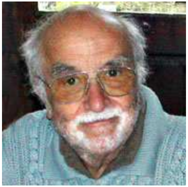
$5^{ème}$ Ecole d'Eté de Mécanique Théorique de Quiberon

Mécanique et Thermodynamique galiléenne des milieux continus (1/4)

Quiberon, 11-17 septembre 2016

Plan de l'exposé

" Les chaussures sont un outil pour marcher;
les mathématiques, un outil pour penser.
On peut marcher sans chaussures, mais on va moins loin."



Jean-Marie Souriau

Grammaire de la Nature (2007)

" It is a widespread belief even today
that classical mechanics is a dead subject,
that its foundations were made clear long ago,
and that all remains to be done is to solve special problems.

This is not so. "

Walter Nolls

The Foundations of Classical Mechanics in the Light of Recent Advances in Continuum Mechanics (1959)

Débat d'idées

La Relativité Générale

n'est pas seulement une théorie de la gravitation qui se réduirait à prédire des effets ténus mais —peut-être surtout— est-elle un cadre de travail cohérent pour la mécanique des milieux continus.

Quelques idées-clefs :

- l'**espace-temps** muni d'une métrique qui en fait une variété riemannienne
- un **groupe de symétrie**, celui de Poincaré
- associée à ce groupe, une **connexion** qui s'identifie à la gravitation et dont les potentiels sont les 10 composantes de la métrique
- un **tenseur d'énergie-impulsion**, représentant la matière, de divergence nulle et généralisant le tenseur des contraintes
- son identification avec un tenseur lié à la **courbure** fournit les équations permettant de déterminer les 10 potentiels

Pour en savoir plus ...
[Souriau 1964 Géométrie et relativité]

Débat d'idées

Ce schéma est-il transposable à la mécanique classique ?

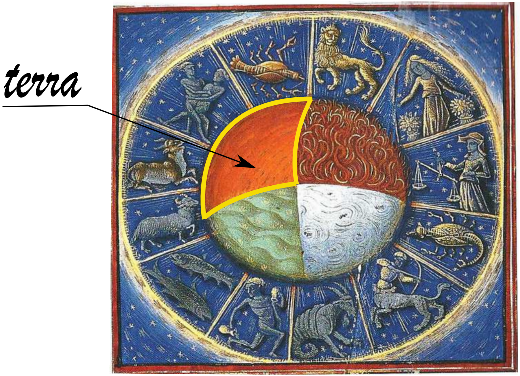
L'idée n'est pas nouvelle...
[Souriau 1970, Küntzle 1972, Duval 1985, Horváthy 1991].

Grands traits cette approche :

- **Travailler dans l'espace-temps** mais avec un **autre groupe**, celui de Galilée
- Il ne conserve aucune métrique, ce qui ne permet plus de descendre ni de monter les indices tensoriels !
- La connexion associée, structurée en **gravité** g et **tournoiement** Ω, conduit à une forme **covariante** de l'équation du mouvement et possède 4 potentiels
- Les groupes de Galilée et de Poincaré sont deux sous-groupes du groupe affine, d'où l'idée de dégager les éléments communs aux théories classique et relativiste, la **mécanique affine** [Souriau CFM 1997 Futuroscope]

- Elle s'articule autour du **torseur**, un tenseur affine 2 fois contravariant antisymétrique dont la divergence est nulle [de Saxcé & Vallée 2003]
- **Pour en savoir plus...** [de Saxcé & Vallée 2016 Galilean Mechanics and Thermodynamics of Continua]

Gravitation et tenseurs affines en Mécanique galiléenne



Le principe de relativité de Galilée

- L'**espace-temps** $\mathcal{M}$, ensemble des évenements, est un espace de dimension 4. Un **événement** $\boldsymbol{X}$ est une occurence ponctuelle et instantanée représenté dans le repère d'un **observateur** par sa date t et sa position x

$$X = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

- Les transformations $X' \mapsto X$ préservant
  - les distances et les angles
  - les durées de temps
  - le mouvement rectiligne uniforme
  - les volumes orientés

  appelées **transformations galiléennes**, sont affines de la forme $X = P\,X' + C$ avec :

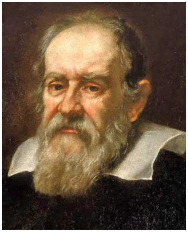
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & R \end{pmatrix}$$

  où $u \in \mathbb{R}^3$ et R est une rotation

Le principe de relativité de Galilée

Toute transformation galiléenne peut être obtenue en composant des transformations élémentaires:

- un **changement d'horloge** τ_0
- une **translation spatiale** k
- une **rotation** R
- une **vitesse d'entraînement** ou **boost galiléen** u



Principe de relativité de Galilée

L'énoncé des lois physiques de la mécanique classique est le même dans tous les systèmes de coordonnées spatio-temporelles qui se déduisent l'un de l'autre par une transformation galiléenne.

On dit que les lois sont **covariantes**

Le principe de relativité de Galilée

- L'espace-temps peut être perçu comme un espace affine
- Une mouvement d'une particule est décrit par sa trajectoire dans l'espace-temps, donc un milieu continu de dimension 1
- La quadrivitesse $\overrightarrow{\boldsymbol{U}}$ se transforme comme un vecteur

$$U = \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v' \end{pmatrix},$$

d'où la **formule de composition additive des vitesses** $v = u + R\,v'$

- L'ensemble $\mathbb{GAL}$ des transformations galiléennes est un sous-groupe du groupe $\mathbb{A}ff\,(4)$ appelé **groupe de Galilée**.
- C'est un **groupe de Lie** de dimension 10 (paramètré par 1 changement d'horloge, 3 translations spatiales, 3 composantes du boost et 3 rotations)
- Il contient le groupe d'Euclide de l'espace

Le principe de relativité de Galilée

- Transformation directe $X' \mapsto X = P\,X' + C$ où

$$C = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ k \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & R \end{pmatrix}$$

- Transformation inverse $X \mapsto X' = P^{-1}X + C'$ où

$$C' = \begin{pmatrix} \tau_0' \\ k' \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -R^T u & R^T \end{pmatrix}$$

$$\tau_0' = -\tau_0, \qquad k' = -R^T(k - u\tau_0)\ .$$

- Organisation des calculs (représentation linéaire du groupe affine $\mathbb{A}ff\,(4)$ dans $\mathbb{R}^5$)

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \qquad \tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau_0 & 1 & 0 \\ k & u & R \end{pmatrix}$$

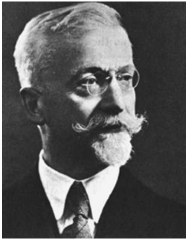
de telle sorte que $X = P\,X' + C$ devient une simple transformation linéaire $\tilde{X} = \tilde{P}\tilde{X}'$

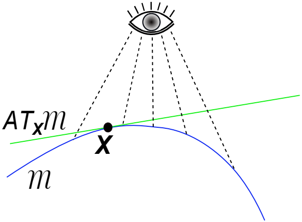
Tenseurs affines

Idée

On pourrait regarder l'espace affine attaché à $\boldsymbol{X}$ comme la variété elle-même qui serait perçue d'une manière affine par un observateur placé en $\boldsymbol{X}$

[Élie Cartan 1923
Sur les variétés à connexion affine...]





Tenseurs affines

Tenseurs affines

Objets sur une variété $\mathcal{M}$ de dimension n dont les composantes sont modifiées par représentation du groupe affine $\mathbb{A}ff\,(n)$.

Les tenseurs classiques sont des tenseurs affines pour lesquels la transformation affine $a = (C, P)$ agit via sa partie linéaire $P = lin(a)$

Types les plus simples :

- **Points tangents :** points $\boldsymbol{a}$ de l'espace tangent à la variété (perçu comme espace affine) $AT_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M}$,

  de composantes V^α dans un repère affine $f = (\boldsymbol{a}_0, (\vec{\boldsymbol{e}}_i))$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}_0 + V^\alpha \vec{\boldsymbol{e}}_\alpha$$

  et de règle tensorielle

$$V^{\alpha'} = C^{\alpha'} + (P^{-1})^{\alpha'}_{\beta}\, V^\beta$$

Tenseurs affines

Types les plus simples :

- **Points tangents :** $\boldsymbol{a} \in AT_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M}$
- **Formes affines :** fonctions numériques affines sur $AT_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M}$, de composantes (Φ_α, χ) :

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{a}) = \Psi(V) = \chi + \Phi_\alpha\, V^\alpha$$

et de règle tensorielle

$$\Phi_{\alpha'} = \Phi_\beta P^\beta_{\alpha'}, \quad \chi' = \chi - \Phi_\beta\, P^\beta_{\alpha'}\, C^{\alpha'}$$

On peut écrire

$$\boldsymbol{\Psi} = \chi\mathbf{1} + \Phi_\alpha \boldsymbol{e}^\alpha$$

où $\mathbf{1}$ est la fonction de valeur 1 et $\boldsymbol{e}^\alpha$ sont les vecteurs de la cobase avec la convention : $\boldsymbol{e}^\alpha(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{e}^\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}})$

Les formes affines $\boldsymbol{\Psi}$ forment un espace vectoriel $A^*T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M}$ de dimension $(n+1)$.

Tenseurs affines

Types plus complexes :

- Les **tenseur affines** p **fois covariants** sont les applications multiaffines:

$$\mathbf{T} : \overbrace{AT_{\mathbf{x}}\mathcal{M} \times AT_{\mathbf{x}}\mathcal{M} \times \cdots AT_{\mathbf{x}}\mathcal{M}}^{p \ times} \rightarrow \mathcal{R} : (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_p) \mapsto \mathbf{T}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_p)$$

  à valeurs affines ou numérique ($\mathcal{R} = \mathbb{R}$)

- L'ensemble des tenseur affines p fois covariants est un espace vectoriel
- Les formes affines sont des tenseurs affines 1 fois covariants
- Plus généralement, on peut remplacer certains arguments par des vecteurs

Tenseurs affines

Types plus complexes :

- Les **tenseurs affines** q **fois contravariants** sont les applications multilinéaires:

$$\mathbf{T} : \overbrace{A^* T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M} \times A^* T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M} \times \cdots A^* T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M}}^{q\ times} \rightarrow \mathcal{R} : (\boldsymbol{\Psi}_1, \boldsymbol{\Psi}_2, \cdots, \boldsymbol{\Psi}_q) \mapsto \mathbf{T}(\boldsymbol{\Psi}_1, \boldsymbol{\Psi}_2, \cdots, \boldsymbol{\Psi}_q)$$

- Les points tangents sont des tenseurs affines 1 fois contravariants.

Par convention $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Psi}) = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{T})$. Parmi les tenseurs affines 1 fois contravariants, on peut s'intéresser aux deux types suivants :

- Pour chaque vecteur tangent $\vec{\boldsymbol{U}}$, l'application $\hat{\boldsymbol{U}}$ définie par $\hat{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{\Psi}) = (lin(\boldsymbol{\Psi}))(\vec{\boldsymbol{U}})$ est telle que $\mathbf{1}(\hat{\boldsymbol{U}}) = \hat{\boldsymbol{U}}(\mathbf{1}) = 0$. Les vecteurs tangents peuvent être identifiés aux éléments du sous-espace vectoriel d'équation $\mathbf{1}(\boldsymbol{T}) = 0$.
- pour chaque point tangent $\boldsymbol{a}$, l'application $\hat{\boldsymbol{a}}$ définie par $\hat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\Psi}) = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{a})$ est telle que $\mathbf{1}(\boldsymbol{a}) = \hat{\boldsymbol{a}}(\mathbf{1}) = 1$. Si $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \vec{\boldsymbol{U}}$, on a:

$$\hat{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{\Psi}) = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{a} + \vec{\boldsymbol{U}}) = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{a}) + (lin(\boldsymbol{\Psi}))(\vec{\boldsymbol{U}}) = \hat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\Psi}) + \hat{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{\Psi}) = (\hat{\boldsymbol{a}} + \hat{\boldsymbol{U}})(\boldsymbol{\Psi})$$

Comme $\boldsymbol{\Psi}$ est arbitraire, ceci défini une action $(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{U}}) \mapsto \hat{\boldsymbol{a}} + \hat{\boldsymbol{U}}$. Donc les points tangents peuvent être identifiés aux éléments du sous-espace affine d'équation $\mathbf{1}(\boldsymbol{T}) = 1$ et sont donc à des tenseurs affines 1 fois contravariants.

Tenseurs affines

Types plus complexes :

- Les **tenseurs affines mixtes** p **fois covariants** et q **fois contravariants** sont les applications p-affines et q-linéaires :

$$\mathbf{T} : \overbrace{AT_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M} \times \cdots AT_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M}}^{p \text{ times}} \times \overbrace{A^* T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M} \times \cdots A^* T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M}}^{q \text{ times}} \to \mathcal{R} :$$

$$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{\Psi}_1, \cdots, \boldsymbol{\Psi}_q) \mapsto \boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{\Psi}_1, \cdots, \boldsymbol{\Psi}_q)$$

  Plus généralement, on peut remplacer certains arguments par des vecteurs

- Exemple : les applications linéaires $\boldsymbol{\mu}$ de $A^* T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M}$ dans $T^*_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M}$ sont des tenseurs mixtes 1 fois covariant et 1 fois contravariant grâce à l'identification avec le tenseur $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ défini par :

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}(\vec{\mathbf{U}}, \boldsymbol{\Psi}) = (\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\Psi}))\vec{\mathbf{U}} \; .$$

- La généralisation aux tenseurs affines du **produit tensoriel** est immédiate. Par exemple, le produit tensoriel d'un point tangent $\boldsymbol{a}$ et d'un vecteur tangent $\vec{\boldsymbol{U}}$ est le tenseur affine 2 fois contravariant $\boldsymbol{a} \otimes \vec{\boldsymbol{U}}$ tel que $(\boldsymbol{a} \otimes \vec{\boldsymbol{U}})(\boldsymbol{\Psi}_1, \boldsymbol{\Psi}_2) = \hat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\Psi}_1)\,\hat{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{\Psi}_2)$

Plus à propos des tenseurs affines : AV-differential geometry [Tulczyjew, Urbañski & Grabowski 1988]

Tenseurs affines : torseurs

Torseurs

Formes bilinéaires antisymétriques $\boldsymbol{\tau}$ sur l'espace vectoriel des fonctions affines.

- Vu la linéarité :

  $$\boldsymbol{\tau}\left(\boldsymbol{\Psi}, \hat{\boldsymbol{\Psi}}\right) = \boldsymbol{\tau}\left(\chi\mathbf{1}+\Phi_\alpha \boldsymbol{e}^\alpha, \hat{\chi}\mathbf{1}+\hat{\Phi}_\beta \boldsymbol{e}^\beta\right) = \chi\hat{\Phi}_\beta\boldsymbol{\tau}(\mathbf{1}, \boldsymbol{e}^\beta)+\hat{\chi}\Phi_\alpha\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{e}^\alpha, \mathbf{1})+\Phi_\alpha\hat{\Phi}_\beta\boldsymbol{\tau}\left(\boldsymbol{e}^\alpha, \boldsymbol{e}^\beta\right)$$

  Vu l'anti-symétrie, on obtient la représentation locale :

  $$\boldsymbol{\tau}\left(\boldsymbol{\Psi}, \hat{\boldsymbol{\Psi}}\right) = T^\alpha(\chi\,\hat{\Phi}_\alpha - \hat{\chi}\,\Phi_\alpha) + J^{\alpha\beta}\Phi_\alpha\hat{\Phi}_\beta$$

  avec $T^\alpha = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{1}, \boldsymbol{e}^\alpha) = -\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{e}^\alpha, \mathbf{1})$ et $J^{\alpha\beta} = -J^{\beta\alpha} = \boldsymbol{\tau}\left(\boldsymbol{e}^\alpha, \boldsymbol{e}^\beta\right)$.
- Observant que $\chi = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{a}_0) = \hat{\boldsymbol{a}}_0(\boldsymbol{\Psi})$ et $\Phi_\alpha = (lin(\boldsymbol{\Psi}))(\vec{\boldsymbol{e}}_\alpha) = \hat{\boldsymbol{e}}_\alpha(\boldsymbol{\Psi})$, il vient :

  $$\boldsymbol{\tau} = T^\alpha\left(\boldsymbol{a}_0 \otimes \vec{\boldsymbol{e}}_\alpha - \vec{\boldsymbol{e}}_\alpha \otimes \boldsymbol{a}_0\right) + J^{\alpha\beta}\,\vec{\boldsymbol{e}}_\alpha \otimes \vec{\boldsymbol{e}}_\beta\ .$$

- Règle tensorielle pour les composantes $(T^\alpha, J^{\alpha\beta})$ du torseur $\boldsymbol{\tau}$:

  $$T^{\alpha'} = (P^{-1})^{\alpha'}_\beta\, T^\beta$$

  $$J^{\alpha'\beta'} = (P^{-1})^{\alpha'}_\mu\,(P^{-1})^{\beta'}_\nu\, J^{\mu\nu} + C^{\alpha'}\left((P^{-1})^{\beta'}_\mu\, T^\mu\right) - \left((P^{-1})^{\alpha'}_\mu\, T^\mu\right) C^{\beta'}.$$

  qui peut s'écrire matriciellement $\tilde{\tau}' = \tilde{P}^{-1}\tilde{\tau}\tilde{P}^{-T}$

Statique

Torseur statique

torseur $\breve{\tau}$ de l'espace représenté dans un système de coordonnées par une matrice 4×4 antisymétrique

$$\breve{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & F^T \\ -F & -j(M) \end{pmatrix}$$

où $F \in \mathbb{R}^3$ est sa **force**, $M \in \mathbb{R}^3$ son **moment**, $j(M)$ est l'unique matrice antisymétrique 3×3 telle que $j(M)\, v = M \times v$ et dont les composantes sont modifiées suivant la loi

$$\breve{\tau} = \breve{P} \breve{\tau}' \breve{P}^T$$

pour les transformations Euclidiennes (Galiléennes restreintes à l'espace)

$$\breve{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & R \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

- pour une translation $x' = x - x_0$, la **loi de transport du moment**
  $F' = F, \qquad M' = M + F \times x_0$
- pour une translation combinée à une rotation :
  $F' = R^T F, \qquad M' = R^T (M + F \times x_0)$

Dynamique des particules : torseur

Torseur dynamique

Torseur $\boldsymbol{\tau}$ de l'espace-temps représenté dans un système de coordonnées par une matrice 5×5 antisymétrique

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & T^T \\ -T & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m & p^T \\ -m & 0 & -q^T \\ -p & q & -j(l) \end{pmatrix}$$

où $T \in \mathbb{R}^4$, J est une matrice antisymétrique 4×4, et dont les composantes sont modifiées suivant la loi

$$\tilde{\tau} = \tilde{P} \tilde{\tau}' \tilde{P}^T$$

pour les transformations Galiléennes $\tilde{X} = \tilde{P} \tilde{X}'$

Quelle est la signification physique des composantes si $m \neq 0$?

- Pour cela, appliquons la loi inverse $\tilde{\tau}' = \tilde{P}^{-1} \tilde{\tau} \tilde{P}^{-T}$:

$$m' = m, \qquad p' = R^T (p - m\, u)$$

$$q' = R^T (q - \tau_0' (p - m\, u)) + m'\, k', \qquad l' = R^T (l + u \times q) + k' \times (R^T (p - m\, u))$$

- puis essayons de trouver une forme réduite

Dynamique des particules : forme réduite

- **Rappel**

$$m' = m, \qquad p' = R^T\,(p - m\,u)$$

$$q' = R^T\,(q - \tau_0'\,(p - m\,u)) + m'\,k', \qquad l' = R^T\,(l + u \times q) + k' \times (R^T(p - m\,u))$$

- **Réduction** (forme quelconque $\longrightarrow$ forme réduite)
  - $u = \dfrac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad p' = 0$ et $q' = R^T q + mk'$
  - $k' = -\dfrac{1}{m}\,R^T q \quad \Rightarrow \quad q' = 0$ and $l' = R^T\,l_0$ avec $l_0 = l - \dfrac{1}{m}\,q \times p$
  - on observe que $l_0' = R^T\,l_0$
- On a identifié **2 invariants** : m et $\|\, l_0 \,\|$
- **Forme réduite**

$$\tilde{\tau}' = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 \\ -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j(l_0) \end{pmatrix}$$

- Nous affirmons qu'elle représente une particule **au repos** en $x' = 0$ à l'instant $t' = 0$

Dynamique des particules : méthode du boost

Méthode du boost (forme réduite $\longrightarrow$ forme quelconque) : considerons $X = PX' + C$ avec un boost Galiléen $u = v$ et une translation de l'origine $k = x_0$ donnant comme équation de la trajectoire : $x = x_0 + v\,t$ et les composantes:

$$p = m\,v, \qquad q = m\,x_0 = m\,(x - v\,t), \qquad l = l_0 + q \times v$$

d'où l'interprétation physique des composantes du torseur :

Torseur Galiléen

Objet structuré en :

- **quadri-impulsion** T, sous-structuré en :
  - **masse** m,
  - **impulsion** ou **quantité de mouvement** p,
- **quadri-moment** J, sous-structuré en :
  - **passage** q (car la particule passe en x_0 en $t = 0$)
  - **moment cinétique** l décomposé en **moment propre** (ou **spin**) l_0 et **moment orbital** $x \times mv$.

On a identifié **2 invariants** : masse m et spin $\| \, l_0 \, \|$ mais y en a-t-il d'autres ?

Parenthèse : groupe de symétrie

- Un **groupe de symétrie** est un groupe G de transformations d'un ensemble $M \to M : x \mapsto x' = a \cdot x$. L'action est à gauche si $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ et à droite si $(ba) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$
- **Exemple** 1 : action à gauche du groupe des rotations $\mathbb{SO}(3)$ sur les vecteurs : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto x' = R\, x$
- **Exemple** 2 : action à droite du groupe affine $\mathbb{A}ff(4)$ sur les torseurs : $\mathbb{M}^a_{5\times 5} \to \mathbb{M}^a_{5\times 5} : \tilde{\tau} \mapsto \tilde{\tau}' = \tilde{P}^{-1} \tilde{\tau} \tilde{P}^{-T}$

- L'**orbite** de x est le sous-ensemble $orb(x) = \{x' \in M \quad tel\ que \quad \exists a \in G, \quad x' = a \cdot x\}$

- Le **stabilisateur** de x est le sous-groupe : $iso(x) = \{a \in G \quad tel\ que \quad a \cdot x = x\}$

Parenthèse : groupe de symétrie

- Soit M une **variété différentielle** et G un **groupe de Lie**
- **Exemple :** le groupe de Galilée est un groupe de Lie de dimension 10.

- **Règle :** la dimension de l'orbite est

$$dim(orb(x)) = dim(G) - dim(iso(x))$$

- **Exemple :** Action du groupe des rotations sur les vecteurs $x' = R\,x$

  - Orbites **génériques** ($x \neq 0$) : l'orbite est la sphère de rayon $\parallel x \parallel$. Le stabilisateur est composé des rotations d'axe x. La règle $dim(orb(x)) = 3 - 1 = 2$ restitue le fait que l'orbite est une surface

  - Orbite **singulière** ($x = 0$) : l'orbite est $\{0\}$. Le stabilisateur est constitué de toutes les rotations. La règle $dim(orb(x)) = 3 - 3 = 0$ restitue le fait que l'orbite est un point

Parenthèse : groupe de symétrie

- une **fonction invariante** (ou **invariant**) par un groupe de symétrie est une fonction constante sur les orbites
- **Dépendance fonctionnelle :** $f_1(x), \ldots, f_p(x)$ invariantes et $h(y_1, \ldots, y_p)$ arbitraire $\Rightarrow \quad h'(x) = h(f_1(x), \ldots, f_p(x))$ invariante.
- **Base fonctionnelle :** ensemble de fonctions invariantes indépendantes et générant toutes les fonctions invariantes
- **Règle :** le nombre d'invariants indépendants est

$$n_{inv} = dim(M) - dim(orb(x))$$

- **Exemple 1 :** Action $x' = R\,x$
  - Orbites **génériques** $(x \neq 0)$: la base contient $3 - 2 = 1$ invariant, par exemple $\| x \|$. Tous les autres invariants sont de la forme $h(\| x \|)$.
  - Orbite **singulière** $(x = 0)$: la base contient $3 - 0 = 3$ invariant. Les invariants de la base sont par exemple $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Application : Action du groupe de Galilée sur les torseurs

- Orbites **génériques** (m et $\parallel l_0 \parallel \neq 0$) : particules à spin
  - Le stabilisateur de $\tilde{\tau}$ est l'ensemble des transformation Galiléenne vérifiant $\tilde{\tau} = \tilde{P}\tilde{\tau}\tilde{P}^T$ et $l_0 = R^T l_0$
  - $u = \frac{1}{m}(p - R\,p)$ stabilise p et $k' = \frac{1}{m}(q - R^T q + \tau' p)$ stabilise q
  - Donc le stabilisateur est constitué des changements d'horloges τ et des rotations d'axe l_0. La dimension de l'orbite est $10 - 2 = 8$. Le nombre d'invariant indépendants est bien $10 - 8 = 2$. Il n'y a pas d'autres invariants que ceux dépendants de m et $\parallel l_0 \parallel \neq 0$
- Orbites **singulières** ($m \neq 0$ et $\parallel l_0 \parallel = 0$) : particules massives sans spin. Le stabilisateur est constitué des changements d'horloges τ et de toutes les rotations. La dimension de l'orbite est $10 - 4 = 6$. Le nombre d'invariant indépendants est bien $10 - 6 = 4$. La base fonctionnelle est constituée de m et des 3 composantes de $l_0 = 0$
- Autres orbites **singulières** : particules sans masse ... [Guillemin & Sternberg Symplectic techniques in physics 1984 (pp. 440-441)]

Dynamique des particules : systèmes de coordonnées Galiléennes

Théorème

Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice jacobienne $P = \frac{\partial X'}{\partial X}$ d'un changement de coordonnées $X \mapsto X'$ soit une transformation galiléenne linéaire est que ce changement soit constitué d'un **déplacement rigide** et d'un changement d'horloge :

$$x' = (R(t))^T (x - x_0(t)), \qquad t' = t + \tau_0$$

La vitesse d'entraînement est alors de la forme : $u = \varpi(t) \times (x - x_0(t)) + \dot{x}_0(t)$
où ϖ est le vecteur de Poisson de la rotation $R(t)$

- **Preuve :** Chercher les conditions d'intégrabilité du système $P = \frac{\partial X'}{\partial X}$ (Frobenius)
- Les systèmes de coordonnés qui se déduisent l'un de l'autre par un tel changement sont appelés **systèmes de coordonnées Galiléennes** (SCG) et ces changements des **galiléomorphismes**
- Exemple de G -**structure intégrable** [Kobayashi 1963]

Parenthèse : G-structure intégrable

- Une variété $\mathcal{M}$ est un objet qui ressemble locallement à $\mathbb{R}^n$ par le choix d'une carte $\phi : V_\phi \to U_\phi : X \mapsto \boldsymbol{X} = \phi(X)$. À toute variation dX des coordonnés on peut associer un **vecteur tangent**

$$\overrightarrow{d\boldsymbol{X}} = \frac{\partial \phi}{\partial X}\, dX = S_\phi dX$$

  ce qui défini une base $(\vec{\boldsymbol{e}}_i)$ de $T_{\boldsymbol{X}}\mathcal{M}$ comme image de la base canonique de $\mathbb{R}^n$
- Soit $\pi : L(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ le fibré principal des bases de groupe structural $\mathbb{GL}(n)$. Une G-structure est un sous-fibré L_G de $L(\mathcal{M})$ de groupe structural G
- Une G-structure L_G est **intégrable** si chaque point $\boldsymbol{X}$ de $\mathcal{M}$ a une carte ϕ autour de $\boldsymbol{X}$ telle que la section $\boldsymbol{X} \mapsto S_\phi(\boldsymbol{X})$ au dessus de U_ϕ est une section de L_G au dessus de U_ϕ. On dit que X est G-admissible.
- Si X' est G-admissible :

$$\frac{\partial X'}{\partial X} = P^{-1} \in G \tag{1}$$

  On dit que $X \mapsto X'$ est un G-**morphisme**.
- Quoiqu'en général les G-structures ne sont pas intégrables –en particulier dans le cas important de la géométrie Riemannienne, l'obstruction étant la courbure–, un fait remarquable est que les structures Galiléennes sont intégrables.

Dynamique des particules : gravitation Galiléenne

- Une **différentielle covariante** ou **connexion** est une application ∇ telle que :
  - si $\boldsymbol{X} \mapsto \vec{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})$ est un champ de vecteurs tangents et $\overrightarrow{d\boldsymbol{X}} \in T_{\boldsymbol{X}}\mathcal{M}$, $\nabla_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}} \vec{\boldsymbol{T}} \in T_{\boldsymbol{X}}\mathcal{M}$
  - il existe une matrice carrée $\Gamma(dX)$ linéaire en dX telle que :

$$\nabla_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}} \vec{\boldsymbol{T}} = S_\phi \nabla_{dX} T$$

avec $\nabla_{dX} T = d(P\, T')|_{\substack{T'=T \\ dP=\Gamma}} = (P\, dT' + dP\, T')\,|_{\substack{T'=T \\ dP=\Gamma}} = dT + \Gamma(dX)\, T$

- La **gravitation** est une connexion symétrique de l'espace-temps: $\Gamma(dX)\delta X = \Gamma(\delta X) dX$
- La **loi covariante du mouvement d'une particule** s'écrit de manière intrinsèque :

$$\nabla_{\vec{\boldsymbol{U}}} \vec{\boldsymbol{T}} = \vec{\boldsymbol{H}}\ ,$$

où $\vec{\boldsymbol{T}}$ est la quadri-impulsion et $\vec{\boldsymbol{H}}$ est le vecteur des autres forces

Dynamique des particules : gravitation Galiléenne

Théorème

La **gravitation Galiléenne** est une connexion symétrique dont l'application Γ prend ses valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe des transformations Galiléennes linéaires. Dans les SCG, elle est de la forme :

$$\Gamma(dX) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Omega \times dx - g\, dt & j(\Omega)\, dt \end{pmatrix},$$

où $j(u)$ est l'unique matrice antisymétrique telle que $j(u)v = u \times v$,

- g est la **gravité** classique
- Ω est un nouvel objet appelé **tournoiement**
-  La gravitation galiléenne ne se transforme pas comme un tenseur !
  C'est une connexion, donc : $\Gamma'(dX') = P^{-1}(\Gamma(P\, dX')\, P + dP)$
  ce qui donne :

$$\Omega = R\, \Omega' - \varpi \qquad g - 2\, \Omega \times v = a_t + R\,(g' - 2\, \Omega' \times v')$$

où l'**accélération d'entraînement** est

$$a_t = \dot{u} + \varpi \times (v - u)$$

Dynamique des particules : loi du mouvement

Quadri-impulsion et quadri-force:

$$T = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$$

Loi covariante du mouvement

Pour des particules matérielles dans le champ de gravitation :

$$\nabla_U T = \frac{\nabla_{dX} T}{dt} = \dot{T} + \Gamma(U)\, T = H\,.$$

Dans les SCG : $\boxed{\dot{m} = 0, \qquad \dot{p} = m\,(g - 2\,\Omega \times v) + F}$

[Souriau 1970 Structure des systèmes dynamiques]

Poussée d'une fusée par un gaz de taux d'éjection $\dot{m}$ et de vitesse d'éjection w par rapport au SCG dans lequel la fusée est au repos

$$H = \dot{m} \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix}$$

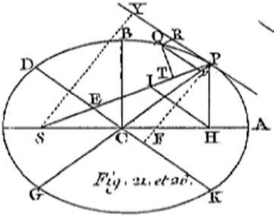
Dynamique des particules : gravitation Newtonienne

gravitation Newtonienne

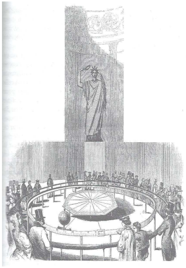
Il existe des SCG particuliers, appelés systèmes de coordonnées **inertiaux** ou **Newtoniens**, pour lesquels la gravitation résultant d'une particule de masse m' passant en x' à l'instant t est donnée par :

$$g = -\frac{k_g\, m'}{\| x - x' \|^2} \frac{x - x'}{\| x - x' \|}, \qquad \Omega = 0 \ ,$$

où k_g est la **constante de gravitation**, égale à $6,674 \cdot 10^{-11} N m^2 kg^{-2}$



Dynamique des particules : une application



Pendule de Foucault

La loi covariante du mouvement :

$$\dot{p} = m\,(g - 2\,\Omega \times v) + F$$

permet d'expliquer simplement le mouvement du pendule de Foucault sans négliger la force centripète comme dans les traités classiques.

- Flashback : loi de transformation de la gravitation galiléenne

$$g - 2\,\Omega \times v = R\,(g' - 2\,\Omega' \times v') + \ddot{x}_0 + \dot{\varpi} \times (x - x_0) + \varpi \times (\varpi \times (x - x_0)) + 2\varpi \times (R\,v')$$

- pour le pendule du Panthéon [en km/h^2] : 10^2 1
- Plutôt que de mesurer la vitesse de rotation de la Terre, le pendule de Foucault (ou le gyroscope) permet une mesure directe du tournoiement Ω de la même manière que l'observation de la chute des particules permet de mesurer la gravité g.

Dynamique des particules : potentiels de la gravitation Galilénne

- Principe de moindre action : $min \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t,x,v)\, dt$ d'où les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}(grad_v\, \mathcal{L}) - grad_x\, \mathcal{L} = 0$$

- Pour une particule en MRU dans le SCG X' : $\mathcal{L}(t,x',v') = \frac{1}{2}\, m \parallel v' \parallel^2$
- Changement de coordonnées $X' \longmapsto X$ avec un boost u : $v = u + R\, v' \quad \Rightarrow$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, m \parallel v \parallel^2 + \frac{1}{2}\, m \parallel u \parallel^2 - m\, u \cdot v$$

- Sur cette base, nous adoptons comme forme générale du Lagrangien :

$$\mathcal{L}(t,x,v) = \frac{1}{2}\, m \parallel v \parallel^2 + m\, A \cdot v - m\, \phi$$

qui restitue l'équation du mouvement $\dot{p} = m\,(g - 2\,\Omega \times v)$ pourvu que :

$$g = -grad\, \phi - \frac{\partial A}{\partial t}, \qquad \Omega = \frac{1}{2}\, curl\, A$$

ϕ et A sont les **potentiels de la gravitation Galiléenne** (4 champs scalaires) et vérifient :

$$curl\, g + 2\,\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0, \qquad div\, \Omega = 0$$

Dynamique des particules : potentiels de la gravitation Galilénne

- Forme générale du Lagrangien (rappel) :

$$\mathcal{L}(t, x, v) = \frac{1}{2}\, m \parallel v \parallel^2 + m\, A \cdot v - m\, \phi$$

- Le **formalisme hamiltonien** est basé sur :
  - le **moment** généralisé : $\pi = grad_v\, \mathcal{L} = m\,(v + A) = p + m\,A$
  - le **Hamiltonien** : $\mathcal{H} = \pi \cdot v - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\, m \parallel v \parallel^2 + m\,\phi = \dfrac{1}{2\,m} \parallel \pi - m\,A \parallel^2 + m\,\phi$

- L'équation d'Euler-Lagrange (d'ordre 2) prend la forme du système des **équations canoniques** (d'ordre 1)

$$\dot{x} = v = grad_\pi\, \mathcal{H} = \frac{\pi}{m} - A$$

$$\dot{\pi} = -grad_x\, \mathcal{H} = m\,(grad\, A)\left(\frac{\pi}{m} - A\right) - m\, grad\, \phi = m\, \left[(grad\, A)\, v - grad\, \phi\right]$$

Différentielle covariante affine

- Une **différentielle covariante affine** est une application $\tilde{\nabla}$ telle que :
  - si $\boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{a}(\boldsymbol{X})$ est un champ de points tangents et $\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}$ est un vecteur tangent, $\tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\,\boldsymbol{a}$ est un vecteur tangent,
  - $\tilde{\nabla}$ s'identifie ∇ lorsqu'elle est appliquée à un tenseur classique et

$$\tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\,\boldsymbol{a}' = \tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\,\boldsymbol{a} + \nabla_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'}$$

- On a donc : $\tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\,\boldsymbol{a} = \tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\,(\boldsymbol{a}_0 + V^\alpha \vec{\boldsymbol{e}}_\alpha) = \tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\,\boldsymbol{a}_0 + \nabla_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\,(V^\alpha \vec{\boldsymbol{e}}_\alpha)$
  soit :

$$\tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\,\boldsymbol{a} = S_\phi \tilde{\nabla}_{dX} V \qquad avec \qquad \tilde{\nabla}_{dX} V = \nabla_{dX} V + \Gamma_A(dX)$$

  où $\Gamma_A(dX) \in \mathbb{R}^n$ est linéaire en dX et représente le **mouvement de l'origine**

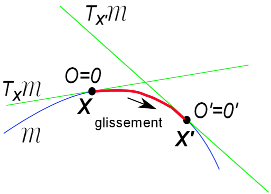
- La généralisation aux tenseurs d'ordres plus élevés résulte de la règle :

$$\tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\,(\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{T}') = \tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\,\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{T}' + \boldsymbol{T} \otimes \tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\,\boldsymbol{T}'$$

Différentielle covariante affine

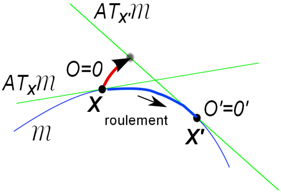
CONNEXION LINEAIRE

glissement

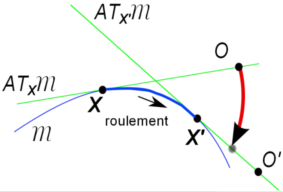


CONNEXION AFFINE

roulement avec origine initiallement à 0



roulement avec origine arbitraire



Différentielle covariante affine

- Lors d'un changement de repère affine $a = (C, P)$, on a :

$$\tilde{\nabla}_{dX}\, V = \nabla_{dX}\,(P\, V' + C) + \Gamma_A(dX) = P\, \nabla_{dX'}\, V' + \nabla_{dX}\, C + \Gamma_A(dX)$$

identifié à : $P\, \tilde{\nabla}_{dX'}\, V' = P\,(\nabla_{dX'} V' + \Gamma'_A(dX'))$, ce qui donne :

$$\Gamma'_A(dX') = P^{-1}(\Gamma_A(P\, dX') + \nabla_{P\, dX'}\, C)$$

- Pour des transformations linéaires $a = (0, P)$, on a : $\Gamma'_A = P^{-1}\Gamma_A P$. Il existe donc un tenseur 1 fois covariant et 1 fois contravariant représenté par la matrice $A = \Gamma_A$

- On en déduit l'expression générale de Γ_A par une translation $a = (C, 0)$:

$$\Gamma_A(dX) = A\, dX - \nabla_{dX}\, C$$

- Pour les applications à la mécanique, on peut choisir $A = 1_{\mathbb{R}^n}$

$$\Gamma_A(dX) = dX - \nabla_{dX}\, C$$

- En notations tensorielles : $\Gamma^{\alpha}_{A\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} - \nabla_{\beta}\, C^{\alpha}$

Dynamique des corps rigides

- En pratique, on peut travailler avec :

$$dX \mapsto d\tilde{P} = \tilde{\Gamma}(dX) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Gamma_A(dX) & \Gamma(dX) \end{pmatrix}$$

où Γ est la **gravitation** et Γ_A représente le **mouvement de l'observateur**

- puis en différentiant le torseur :

$$\tilde{\nabla}_{dX}\,\tilde{\tau} = d(\tilde{P}\,\tilde{\tau}'\,\tilde{P}^T)|_{\substack{X'=X \\ d\tilde{P}=\tilde{\Gamma}}} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla_{dX}\,T^T \\ -\nabla_{dX}\,T & \tilde{\nabla}_{dX}\,J \end{pmatrix}$$

avec : $\nabla_{dX}\,T = dT + \Gamma\,T, \qquad \tilde{\nabla}_{dX}\,J = dJ + \Gamma\,J + J\,\Gamma^T + \Gamma_A T^T - T\,\Gamma_A^T$

Loi du mouvement des corps rigides

Le torseur des autres forces étant représenté par :

$$\tilde{\tau}^\star = \begin{pmatrix} 0 & H^T \\ -H & G \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -j(M) \end{pmatrix}$$

la loi covariante du mouvement est :

$$\tilde{\nabla}_{\vec{U}}\,\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^\star\ .$$

Dynamique des corps rigides

- Torseur dynamique d'un corps $\mathcal{B}$:

$$\tilde{\tau}(\mathcal{B}) = \iiint_{\mathcal{B}} d\tilde{\tau} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & m_{\mathcal{B}} & p_{\mathcal{B}}^T \\ -m_{\mathcal{B}} & 0 & -q_{\mathcal{B}}^T \\ -p_{\mathcal{B}} & q_{\mathcal{B}} & -j(l_{\mathcal{B}}) \end{pmatrix} \;,$$

  avec dans un repère barycentrique (1^{er} théorème de König) :

  - la masse : $m_{\mathcal{B}}$,
  - la quantité de mouvement: $p_{\mathcal{B}} = m_{\mathcal{B}} \dot{x}_{\mathcal{B}}$,
  - le passage : $q_{\mathcal{B}} = m_{\mathcal{B}} x_{\mathcal{B}}$,
  - le moment angulaire : $l_{\mathcal{B}} = x_{\mathcal{B}} \times m_{\mathcal{B}} \dot{x}_{\mathcal{B}} + l_{0\mathcal{B}} = x_{\mathcal{B}} \times m_{\mathcal{B}} \dot{x}_{\mathcal{B}} + \mathcal{J}_{\mathcal{B}} \varpi$,

- La loi covariante du mouvement $\tilde{\nabla}_U \, \tilde{\tau} = \tilde{\tau}^{\star}$ s'écrit :

$$\dot{m}_{\mathcal{B}} = 0, \qquad \dot{p}_{\mathcal{B}} = m_{\mathcal{B}} \, (g - 2\,\Omega \times \dot{x}_{\mathcal{B}}) + F$$

$$\dot{q}_{\mathcal{B}} = p_{\mathcal{B}}, \qquad \dot{l}_{\mathcal{B}} + \Omega \times l_{0\mathcal{B}} = x_{\mathcal{B}} \times m_{\mathcal{B}} (g - 2\,\Omega \times \dot{x}_{\mathcal{B}}) + M$$

  On peut ainsi expliquer le mouvement d'un satellite ou d'une toupie