

Mécanique galiléenne des milieux continus

G. de Saxcé

5^{ème} Ecole d'Eté de Mécanique Théorique de Quiberon

Mécanique et Thermodynamique galiléenne des milieux continus (2/4)

Quiberon, 11-17 septembre 2016



Mécanique galiléenne des milieux continus



Plan de l'exposé

1 Débat d'idées

- Pourquoi travailler dans l'espace-temps ?
- Tenseur d'un milieu continu de dimension arbitraire

2 Dynamique d'un milieu continu 3D

- Tenseur d'un MC de dimension arbitraire
- Tenseur d'un MC 3D
- Tenseur de contrainte-masse
- Équations d'Euler d'un MC

3 Courbure galiléenne

Débat d'idées : pourquoi travailler dans l'espace-temps ?

On peut y voir plusieurs avantages, notamment pour :

- Écrire la **dérivée matérielle** d'une quantité q (scalaire ou vectorielle):

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} v = \frac{\partial q}{\partial X} U .$$

- Représenter le **transport** d'un scalaire par le quadriflux $q U$
- Modéliser sa **conservation** : $div_X (q U) = \frac{\partial q}{\partial t} + div (q v) = 0$

Rappel de la méthode de travail :

- Identifier les **groupes de symétrie**
- Identifier les composantes des tenseurs spatio-temporels (**covariants**)
- Déterminer une base d'**invariants** (complets et indépendants entre eux)

Débat d'idées : torseur d'un milieu continu de dimension arbitraire

On souhaite développer une approche générale pour la dynamique de corps de dimension d représentés par une sous-variété \mathcal{N} de dimension $d + 1$ de l'espace-temps \mathcal{M} :

- $d = 0$: particules et corps rigides, représentés par une courbe (déjà traités)
- $d = 1$: corps matériels 1D, représentés par une surface (arcs si solide, écoulement dans un tube ou jet si fluide) [de Saxcé & Vallée *Galilean Mechanics and Thermodynamics of Continua* 2016 ch. 11]
- $d = 2$: corps matériels 2D, représentés par un volume (plaque ou coque si solide, nappe liquide ou voile gazeux) [de Saxcé & Vallée *JTAM* 2003]
- $d = 3$: corps matériels 3D, représentés par une sous-variété de dimension 4 (traité par la suite)

Dynamique d'un milieu continu: torseur d'un MC de dimension arbitraire

Torseurs à valeurs vectorielles

Pour un milieu continu vu comme une sous-variété de l'espace-temps décrite par un plongement $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} : \xi \mapsto \mathbf{X} = f(\xi)$, on considère un torseur en $\mathbf{X} = f(\xi)$ à valeur vectorielle dans l'espace vectoriel tangent en ξ à \mathcal{N} .

- Par convention, nous placerons à gauche les indices relatifs à la sous-variété \mathcal{N}
- Dans un repère affine $(\mathbf{X}_0, (\vec{e}_\alpha))$ de $AT_{\mathbf{X}}\mathcal{M}$ et une base $(\gamma \vec{\eta})$ de $T_\xi \mathcal{N}$, il se décompose en :

$$\tau = \gamma \tau \gamma \vec{\eta}, \quad \gamma \tau = \gamma T^\beta (\mathbf{X}_0 \otimes \vec{e}_\beta - \vec{e}_\beta \otimes \mathbf{X}_0) + \gamma J^{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta .$$

- $(\gamma \vec{\eta}')$ étant une nouvelle base de $T_\xi \mathcal{N}$ obtenue à partir de l'ancienne par une matrice de passage S , la règle tensorielle s'écrit

$${}^\sigma T'^\rho = (P^{-1})^\rho_\beta {}^\sigma_\gamma (S^{-1}) \gamma T^\beta$$

$$\tau J'^{\rho\sigma} = \left[(P^{-1})^\rho_\alpha (P^{-1})^\sigma_\beta \gamma J^{\alpha\beta} + C'^\rho \left\{ (P^{-1})^\sigma_\beta \gamma T^\beta \right\} - \left\{ (P^{-1})^\rho_\beta \gamma T^\beta \right\} C'^\sigma \right] \tau_\gamma (S^{-1})$$

Dynamique d'un milieu continu 3D : torseur d'un MC

dynamique d'un milieu continu 3D

Par convenance, on choisit $X^\alpha = \xi^\alpha$. La distinction entre indices à gauche et à droite n'est plus pertinente et nous les placerons tous à droite : ${}^\gamma T^\alpha = T^{\alpha\gamma}$ et ${}^\gamma J^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta\gamma}$.

- Dans un repère affine $(\mathbf{X}_0, (\vec{e}_\alpha))$ de $AT_X \mathcal{M}$, le torseur se décompose en :

$$\boldsymbol{\tau} = \tau^\gamma \vec{e}_\gamma, \quad \tau^\gamma = T^{\beta\gamma} (\mathbf{X}_0 \otimes \vec{e}_\beta - \vec{e}_\beta \otimes \mathbf{X}_0) + J^{\alpha\beta\gamma} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta$$

- Calculons sa différentielle covariante :

$$\tilde{\nabla}_{d\vec{X}} \boldsymbol{\tau} = \tilde{\nabla}_{d\vec{X}} (\tau^\gamma \vec{e}_\gamma) = (\tilde{\nabla}_{d\vec{X}} \tau^\gamma) \vec{e}_\gamma + \tau^\gamma (\tilde{\nabla}_{d\vec{X}} \vec{e}_\gamma) = (\tilde{\nabla}_{d\vec{X}} \tau^\gamma + \Gamma_\rho^\gamma \tau^\rho) \vec{e}_\gamma$$

- Le calcul du premier terme est similaire à celui d'un torseur à valeur scalaire (ajouter l'indice γ), ce qui donne :

$$\tilde{\nabla}_{d\vec{X}} \boldsymbol{\tau} = \left[\tilde{\nabla}_{dX} T^{\beta\gamma} (\mathbf{X}_0 \otimes \vec{e}_\beta - \vec{e}_\beta \otimes \mathbf{X}_0) + \tilde{\nabla}_{dX} J^{\alpha\beta\gamma} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta \right] \vec{e}_\gamma$$

$$\text{avec : } \tilde{\nabla}_{dX} T^{\beta\gamma} = dT^{\beta\gamma} + \Gamma_\rho^\beta T^{\rho\gamma} + \Gamma_\rho^\gamma T^{\beta\rho}$$

$$\tilde{\nabla}_{dX} J^{\alpha\beta\gamma} = dJ^{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_\rho^\alpha J^{\rho\beta\gamma} + \Gamma_\rho^\beta J^{\alpha\rho\gamma} + \Gamma_\rho^\gamma J^{\alpha\beta\rho} + \Gamma_A^\alpha T^{\beta\gamma} - T^{\alpha\gamma} \Gamma_A^\beta$$

- $\tilde{\nabla}_{d\vec{X}} \boldsymbol{\tau}$ est linéaire en $d\vec{X}$

Dynamique d'un milieu continu 3D : torseur d'un MC

- Il existe donc un champ $\tilde{\nabla} \boldsymbol{\tau}$ de tenseurs affines 1 fois covariant et 3 fois contravariant tel que :

$$\tilde{\nabla}_{d\vec{X}} \boldsymbol{\tau} = (\tilde{\nabla} \boldsymbol{\tau}) \cdot d\vec{X}$$

$$\text{avec : } \tilde{\nabla} \boldsymbol{\tau} = \left[\tilde{\nabla}_\sigma T^{\beta\gamma} (\mathbf{X}_0 \otimes \vec{e}_\beta - \vec{e}_\beta \otimes \mathbf{X}_0) + \tilde{\nabla}_\sigma J^{\alpha\beta\gamma} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta \right] \vec{e}_\gamma \otimes \mathbf{e}^\sigma$$

$$\text{où : } \tilde{\nabla}_\sigma T^{\beta\gamma} = \frac{\partial T^{\beta\gamma}}{\partial X^\sigma} + \Gamma_{\sigma\rho}^\beta T^{\rho\gamma} + \Gamma_{\sigma\rho}^\gamma T^{\beta\rho}$$

$$\tilde{\nabla}_\sigma J^{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial J^{\alpha\beta\gamma}}{\partial X^\sigma} + \Gamma_{\sigma\rho}^\alpha J^{\rho\beta\gamma} + \Gamma_{\sigma\rho}^\beta J^{\alpha\rho\gamma} + \Gamma_{\sigma\rho}^\gamma J^{\alpha\beta\rho} + \Gamma_{A\sigma}^\alpha T^{\beta\gamma} - T^{\alpha\gamma} \Gamma_{A\sigma}^\beta$$

- Par contraction, on définit la **divergence covariante affine** du torseur dynamique du MC :

$$\tilde{\text{Div}} \boldsymbol{\tau} = \tilde{\nabla}_\gamma T^{\beta\gamma} (\mathbf{X}_0 \otimes \vec{e}_\beta - \vec{e}_\beta \otimes \mathbf{X}_0) + \tilde{\nabla}_\gamma J^{\alpha\beta\gamma} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta$$

$$\text{avec : } \tilde{\nabla}_\gamma T^{\beta\gamma} = \frac{\partial T^{\beta\gamma}}{\partial X^\gamma} + \Gamma_{\gamma\rho}^\beta T^{\rho\gamma} + \Gamma_{\gamma\rho}^\gamma T^{\beta\rho}$$

$$\tilde{\nabla}_\gamma J^{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial J^{\alpha\beta\gamma}}{\partial X^\gamma} + \Gamma_{\gamma\rho}^\alpha J^{\rho\beta\gamma} + \Gamma_{\gamma\rho}^\beta J^{\alpha\rho\gamma} + \Gamma_{\gamma\rho}^\gamma J^{\alpha\beta\rho} + \Gamma_{A\gamma}^\alpha T^{\beta\gamma} - T^{\alpha\gamma} \Gamma_{A\gamma}^\beta$$

Dynamique d'un milieu continu 3D : torseur d'un MC

Principe général

On généralise les équations du mouvement sous la forme :

$$\tilde{\text{Div}} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{0}$$

où $\boldsymbol{\tau}^*$ est le torseur des autres forces (que la gravitation)

Deux approches sont possibles :

- **Milieu de Cosserat** : aucune restriction sur les composantes $J^{\alpha\beta\gamma}$
- **Milieu de Cauchy** : on postule que $J^{\alpha\beta\gamma} = 0$ dans les repères affines dont l'origine mobile est au point \mathbf{X} . On passe d'un à l'autre par des transformations linéaires (donc pas de translation : $C^\alpha = 0$) d'où : $\Gamma_{A\beta}^\alpha = \delta_\beta^\alpha - \nabla_\beta C^\alpha = \delta_\beta^\alpha$

En vertu du principe général :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\gamma J^{\alpha\beta\gamma} &= \frac{\partial J^{\alpha\beta\gamma}}{\partial X^\gamma} + \Gamma_{\gamma\rho}^\alpha J^{\rho\beta\gamma} + \Gamma_{\gamma\rho}^\beta J^{\alpha\rho\gamma} + \Gamma_{\gamma\rho}^\gamma J^{\alpha\beta\rho} + \Gamma_{A\gamma}^\alpha T^{\beta\gamma} - T^{\alpha\gamma} \Gamma_{A\gamma}^\beta \\ &= \delta_\gamma^\alpha T^{\beta\gamma} - T^{\alpha\gamma} \delta_\gamma^\beta = 0 \end{aligned}$$

d'où la condition de symétrie :

$$T^{\beta\alpha} = T^{\alpha\beta}$$

Dynamique d'un milieu continu 3D : tenseur de contrainte-masse

- Les $T^{\alpha\gamma}$ sont les composantes d'un tenseur classique 2 fois contravariant \mathbf{T} symétrique de règle tensorielle :

$$\mathbf{T}' = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{P}^{-T}$$

- pour un **tenseur Galiléen** de forme :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \rho & \mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & -\sigma_* \end{pmatrix},$$

elle donne :

$$\rho' = \rho, \quad \mathbf{p}' = R^T(\mathbf{p} - \rho \mathbf{u}), \quad \sigma'_* = R^T(\sigma_* + \mathbf{u} \mathbf{p}^T + \mathbf{p} \mathbf{u}^T - \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T) R$$

- réduction** : $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}}{\rho} \Rightarrow \mathbf{p}' = 0$ et $\sigma'_* = R^T \sigma R$ avec :

$\sigma = \sigma_* + \frac{1}{\rho} \mathbf{p} \mathbf{p}^T$ tel que $\sigma' = R^T \sigma R$ qui peut être ramenée à sa forme diagonale $\sigma' = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ par le choix d'une rotation :

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\sigma' \end{pmatrix},$$

Méthode du boost : considérons un changement de variables $X' \mapsto X$ avec un boost Galiléen $u = v$ et une rotation R qui donnent

$$\sigma_{\star} = \sigma - \rho v v^T$$

avec $\sigma = R \sigma' R^T$

Tenseur de contrainte-masse

Objet structuré en :

- **densité** ρ ,
- **quantité de mouvement** ρv ,
- **contraintes statiques de Cauchy** σ ,

représenté par la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} \rho & \rho v^T \\ \rho v & \rho v v^T - \sigma \end{pmatrix}$$

On a identifié **4 invariants** : $\rho, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Dynamique d'un milieu continu 3D : équations d'Euler d'un MC

La forme covariante

$$\tilde{\nabla}_\gamma T^{\beta\gamma} + H^\beta = 0$$

des équations du mouvement donne :

Équations d'Euler des milieux continus

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (\rho v^j) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + f_v^i + \rho (g^i - 2\Omega_j^i v^j).$$

où Ω_j^i sont les éléments de la matrice $j(\Omega)$ et f_v^i les composantes des forces de volumes (autres que la gravitation)

Courbure galiléenne

En relativité, l'espace-temps est courbe mais qu'en est-il en mécanique classique ?
L'espace-temps est-il plat ou courbe ?

- Pour y répondre, nous devons calculer le **tenseur de courbure de Riemann-Christoffel**

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \Gamma_{\alpha\mu}^{\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} - \Gamma_{\beta\mu}^{\delta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} + \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\delta}}{\partial X^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta}}{\partial X^{\beta}}$$

- soit pour la gravitation galiléenne : $R_{kj0}^i = -R_{jk0}^i = \frac{\partial \Omega_j^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Omega_k^i}{\partial x^j}$, $R_{k0j}^i = -R_{0kj}^i = \frac{\partial \Omega_j^i}{\partial x^k}$

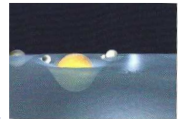
$$R_{0j0}^i = -R_{j00}^i = \frac{\partial g^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \Omega_j^i}{\partial t} + \Omega_k^i \Omega_j^k$$

- ou sous forme matricielle : $R(dX, \delta X) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x} + j \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) + (j(\Omega))^2 \right) (\delta x dt - dx \delta t) + \text{curl}(j(\Omega)) \delta x \times dx & j \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} (dx \delta t - \delta x dt) \right) \end{pmatrix}$$



L'espace-temps est donc en général courbe,
même en mécanique classique !



Courbure galiléenne

- La quantité suivante, dépendant de la gravitation et de ses potentiels,

$$I = \operatorname{div} g - 2 \|\Omega\|^2 + 2 A \cdot \operatorname{curl} \Omega$$

est un **invariant galiléen**

- D'autre part, nous connaissons un invariant galiléen représentant la matière, la densité ρ , ce qui suggère que ces invariants sont proportionnels

$$\operatorname{div} g - 2 \|\Omega\|^2 + 2 A \cdot \operatorname{curl} \Omega = -4 \pi k_g \rho$$

- En particulier, si $A = 0$, alors $g = -\operatorname{grad} \phi$ et $\Omega = 0$ donc cette condition se réduit à l'équation de Poisson

$$\Delta \phi = 4 \pi k_g \rho$$

dont la solution restitue la gravitation newtonienne



- Toutefois, l'équation de Poisson n'a pas la covariance galiléenne attendue !