Mécanique symplectique

G. de Saxcé

5ème Ecole d'Eté de Mécanique Théorique de Quiberon

Mécanique et Thermodynamique galiléenne des milieux continus (4/4)

Quiberon, 11-17 septembre 2016

Plan de l'exposé

Un parfum de géométrie symplectique

Un champ de tenseurs anti-symétriques $\omega(\delta\eta, d\eta)$ sur une variété $\mathcal{N}$ dont le noyau $Ker\,\omega$ est de dimension constante et fermée ($d\omega = 0$)

est appelé **forme symplectique** (ou crochets de Lagrange)

- Il permet de retrouver les **équations canoniques** (équations du mouvement) sous la forme

$$\forall\delta\eta, \qquad \omega(\delta\eta, d\eta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d\eta \in Ker(\omega)$$

- La variété $\mathcal{N}$ est dite **présymplectique** (et **symplectique** si $rang\,\omega = dim\,\mathcal{N}$)
- **Exemple :** l'**espace de phase** $\mathcal{N}$, ensemble des

$$\eta = \begin{pmatrix} t \\ x \\ v \end{pmatrix}$$

est une variété présymplectique pour la forme :

$$\omega(d\eta, \delta\eta) = m\,[(dv - g\,dt)\cdot(\delta x - v\,\delta t) - (\delta v - g\,\delta t)\cdot(dx - v\,dt) - 2\,\Omega\cdot(\delta x \times dx)]$$

La condition de fermeture $d\omega = 0$ restitue : $curl\,g + 2\,\frac{\partial\Omega}{\partial t} = 0, \quad div\,\Omega = 0$

Un parfum de géométrie symplectique

- Si un groupe de Lie G agissant sur $\mathcal{N}$ par $a \mapsto a \cdot \eta$ préserve la forme symplectique :

$$\forall a \in G, \qquad L_a^* \omega = \omega$$

  on dit que c'est un **groupe symplectique**

  On note $\mathfrak{g}^*$ le dual de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

- $\eta \mapsto \mu = \psi(\eta) \in \mathfrak{g}^*$ est une **application moment** (Souriau) si

$$\omega(Z \cdot \eta, d\eta) = -d(\psi(\eta)\, Z)$$

  Elle permet de retrouver des **intégrales premières** du mouvement (version moderne du théorème de Noether)

- G agit naturellement sur $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe $Ad(a)\, Z = a\, Z\, a^{-1}$ et sur $\mathfrak{g}^*$ par l'action induite Ad^* (**représentation coadjointe**)

Un parfum de géométrie symplectique

Théorème (Souriau)

Si G est connexe, il existe une application $cocs : G \mapsto \mathfrak{g}^*$ appelé **cocycle symplectique** définie par

$$cocs(a) = \psi(a \cdot \eta) - Ad^*(a)\,\psi(\eta)$$

telle que :

- ♢ $cocs(a'a) = cocs(a') + Ad^*(a')\,cocs(a)$ (identité du cocycle)
- ♡ $dcocs = D\,cocs\,(e)$ est anti-symétrique

- modulo un **cobord**

  $$cobs_{\mu_0}(a) = Ad^*(a)\,\mu_0 - \mu_0$$

  il défini une **classe de cohomologie symplectique** $[cocs] \in H^1(G; \mathfrak{g}^*)$, généralement nulle.

-  Une exception remarquable est le **groupe de Galilée**, le groupe de symétrie de la mécanique classique

Le moment comme tenseur affine

- Soit $\mathcal{M}$ une variété de dimension n (dans la suite, l'espace-temps), G un sous-groupe de $\mathbb{A}ff(n)$ (pour nous, le groupe de Galilée)

- $AT_{\boldsymbol{X}}\mathcal{M}$ est l'espace tangent à $\mathcal{M}$ en $\boldsymbol{X}$ percu comme un espace affine
- $A^* T_{\boldsymbol{X}}\mathcal{M}$ est l'espace vectoriel des formes affines $\boldsymbol{\Psi}$ sur $AT_{\boldsymbol{X}}\mathcal{M}$

Tenseur moment

On appelle **tenseur moment** une forme bilinéaire

$$\boldsymbol{\mu} : T_{\boldsymbol{X}}\mathcal{M} \times A^* T_{\boldsymbol{X}}\mathcal{M} \to \mathbb{R}$$

C'est un **tenseur affine** mixte 1 fois covariant et 1 fois contravariant

- Il est représenté dans un repère affine f par

$$\boldsymbol{\mu}(\overrightarrow{\boldsymbol{V}}, \boldsymbol{\Psi}) = (\chi\, F_\beta + \Phi_\alpha L^\alpha_\beta)\, V^\beta$$

où F_β et L^α_β sont les composantes de $\boldsymbol{\mu}$ dans f

Le moment comme tenseur affine

- La règle tensorielle pour les composantes $\mu = (F, L)$ de $\boldsymbol{\mu}$ est donnée par l'action induite de $\mathbb{A}ff(n)$

$$F = F' P^{-1} \qquad L = (P\, L' + C\, F')\, P^{-1}$$

- Soit $a = (C, P) \in \mathbb{A}ff(n)$ la transformation $dX \mapsto C + P\, dX$ et $Z \in \mathfrak{g}$ le générateur infinitésimal $da = (dC, dP)$

- Si l'espace des μ est identifié à $\mathfrak{g}^*$ grâce au produit de dualité

$$\mu\, Z = \mu\, da = (F, L)\, (dC, dP) = F\, dC + Tr(L\, dP)$$

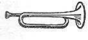
la règle tensorielle pour les μ n'est rien d'autre que la représentation coadjointe !

Le moment comme tenseur affine

- Cette construction mathématique n'est pas pertinente pour la mécanique classique et nous l'étendons en considérant une règle tensorielle généralisée

$$\mu = a \cdot \mu' = Ad^*(a)\,\mu' + cocs(a)$$

qui est une représentation affine de G dans $\mathfrak{g}^*$
(parce que nous souhaitons que le moment soit un tenseur affine)

-  Comparant à la formule du théorème des cocycles symplectiques, reformulée comme

$$\psi(\eta) = Ad^*(a)\,\psi'(\eta) + cocs(a)$$

où $\psi \mapsto \psi' = a \cdot \psi$ est l'action induite,
il apparaît que **les valeurs de l'application moment** *ne sont rien d'autre que des tenseurs moment !*

Tenseur moment galiléen

Les composantes du moments $\mu = (F, L)$ se structurent en :

$$F = \begin{pmatrix} -e & p^T \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} \alpha & -q^T \\ -w & -j\left(\frac{1}{2}\, l\right) + E^s \end{pmatrix}$$

Pour un générateur infinitésimal galiléen $Z = (dC, dP)$:

$$dC = \begin{pmatrix} d\tau_0 \\ dk \end{pmatrix}, \qquad dP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ du & j(d\varpi) \end{pmatrix},$$

le produit de dualité est de la forme : $\mu\, Z = l \cdot d\omega - q \cdot du + p \cdot dk - e\, d\tau$
Les composantes affines s'interprètent comme :

- l'énergie e
- la quantité de mouvement p
- le passage q
- le moment cinétique l

Les autres quantités sont masquées dans le produit de dualité :

- le moment symétrique E^s
- l'action α
- le super-moment $w = e\, x - \alpha\, v$

Tenseur moment galiléen

- la règle tensorielle $\mu = Ad^*(a)\,\mu' + cocs(a)$ pour le groupe de Galilée est :

$$p = R\,p' + m\,u, \qquad q = R\,(q' - \tau_0 p') + m\,(k - \tau_0 u)$$

$$l = R\,l' - u \times (R\,q') + k \times (R\,p') + m\,k \times u$$

$$e = e' + u \cdot (R\,p') + \frac{1}{2}\,m \parallel u \parallel^2$$

où les termes dus au cocycle symplectique sont en rouge
Pour le calcul du cocycle du groupe de Galilée, voir :
[Souriau 1970 Structure des systèmes dynamiques]
[de Saxcé & Vallée Galilean Mechanics and Thermodynamics of Continua 2016]

- (F_m, L_m) étant les composantes du cocycle symplectique *cocs*, l'action s'écrit :

$$F = F'\,P^{-1} + F_m(C, P), \qquad L = (P\,L' + C\,F')\,P^{-1} + L_m(C, P)$$

avec par exemple :

$$F_m(C, P) = m\left(-\frac{1}{2} \parallel u \parallel^2, u^T\right)$$

Le moment comme tenseur affine

- La **représentation adjointe infinitésimale** est

$$ad(Y)\,Z = d(aYa^{-1}) = [Y, Z] = ZY - YZ$$

- La **représentation coadjointe infinitésimale** est définie par

$$(ad^*(Y)\mu)\,(Z) = -\mu\,(ad\,(Y)\,Z) = -\mu[Y, Z]$$

Théorème de Kirillov-Kostant-Souriau

Soit un groupe de Lie G et une orbite pour l'action $\mu = a \cdot \mu' = Ad^*(a)\,\mu' + cocs(a)$. Alors:

♢ L'inclusion $orb\,(\mu) \to \mathfrak{g}^*$ est un plongement régulier. Un vecteur $d\mu \in T_\mu \mathfrak{g}^*$ est tangent à l'orbite s'il existe $Z_d \in \mathfrak{g}$ tel que

$$d\,\mu = \mu \circ ad\,(Z_d) + dcocs\,(Z_d) = -ad^*(Z_d)\mu + dcocs\,(Z_d)$$

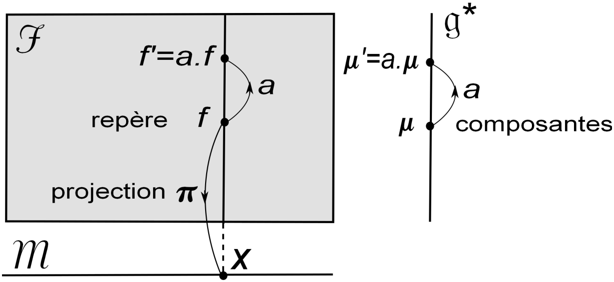
♡ L'orbite $orb\,(\mu)$ est une variété symplectique pour la forme

$$\omega_{KKS}(d\mu, \delta\mu) = \mu\,[Z_d, Z_\delta] + dcocs\,(Z_d, Z_\delta)$$

La dimension de l'orbite est paire

♠ G est un groupe symplectique et tout point μ de $\mathfrak{g}^*$ **est son propre moment**

Connexion sur un fibré principal

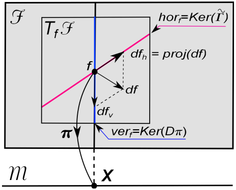


- Soit $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$ un fibré principal de groupe structural G avec une action libre $(a, f) \mapsto f' = a \cdot f$ sur chaque fibre
- On peut construire un fibré principal associé

$$\hat{\pi} : \mathfrak{g}^* \times \mathcal{F} \to (\mathfrak{g}^* \times \mathcal{F})/G : (\mu, f) \mapsto \boldsymbol{\mu} = orb(\mu, f)$$

pour l'action libre $(a, (\mu, f)) \mapsto (\mu', f') = a \cdot (\mu, f) = (a \cdot \mu, a \cdot f)$

Connexion sur un fibré principal



- Soit $ver_f = Ker\,(D\pi)$ l'espace vertical en f. Une **connexion d'Ehresmann** sur $\mathcal{F}$ est un champ d'espaces supplémentaires hor_f dans $T_f\mathcal{F}$

$$T_f\mathcal{F} = ver_f \oplus hor_f$$

  La décomposition $df = df_v + df_h$ est unique et l'application $hor : T_f\mathcal{F} \to hor_f : df \mapsto df_h$ est appelée la projection horizontale
- Alternativement, une connexion peut être définie comme un champ de 1-formes $\tilde{\Gamma}$ sur $\mathcal{F}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ tel que $hor_f = Ker\,(\tilde{\Gamma})$ et:
  - ♢ $\tilde{\Gamma}$ est **verticale**: $\forall df_h \in hor_f, \qquad \tilde{\Gamma}(df_h) = 0,$
  - ♡ $\tilde{\Gamma}(Z \cdot f) = Z,$
  - ♠ $\tilde{\Gamma}$ est Ad-**équivariante**: $L_a\tilde{\Gamma} = Ad(a)\,\tilde{\Gamma}$ où $Ad(a)$ est la représentation adjointe
- En particulier, si G un sous-groupe de $\mathbb{A}ff\,(n)$, on obtient une **connexion affine** $\tilde{\Gamma} = (\Gamma_A, \Gamma)$ [Élie Cartan 1923]

Algorithme de factorisation

- Heuristique : on peut factoriser la forme symplectique comme le produit extérieur des équations canoniques :

$$\omega = \left(d\pi_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}\, dt \right) \wedge \left(dx_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i}\, dt \right)$$

C'est ce genre de construction que nous aimerions étendre. Pour intuiter une telle généralisation, nous considérons le cas usuel $A = 0$ pour lequel :

$$\omega = (d p_i - g_i dt) \wedge \left(dx_i - \frac{p_i}{m} dt \right) \; .$$

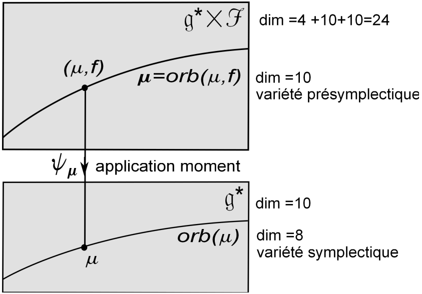
la quantité de mouvement p se généralise commr le tenseur moment, la gravité g comme une connexion affine

- Mise en dualité des moments et connexions :
  - $\mu = (F, L)$ composantes du moment $\boldsymbol{\mu}$ dans le repère affine f
  - $\tilde{\Gamma} = (\Gamma_A, \Gamma)$ connexion affine
  - produit de dualité :

$$\mu\, \tilde{\Gamma} = F\, \Gamma_A + \frac{1}{2}\, Tr(L\, \Gamma)$$

- Factorisation de la 2-forme symplectique : $\boxed{\omega = \frac{1}{2}\, d\mu \wedge \tilde{\Gamma}}$

Algorithme de factorisation



- *orb* $(\mu) \subset \mathfrak{g}^*$ a une structure naturelle de variété symplectique pour ω_{KKS}
- Nous munissons *orb* $(\mu, f) \subset \mathfrak{g}^* \times \mathcal{F}$ d'une structure de variété symplectique pour la forme $\omega = \frac{1}{2}\, d\mu \wedge \tilde{\Gamma}$
- Nous allons montrer que la restriction $\psi_{\boldsymbol{\mu}}$ à l'orbite $\boldsymbol{\mu} = orb(\mu, f)$ de la projection $\mathfrak{g}^* \times \mathcal{F} \to \mathfrak{g}^* : (\mu, f) \mapsto \mu$ est une application moment

Algorithme de factorisation

Théorème

Soit :

- G un groupe de Lie agissant sur $\mathfrak{g}^*$ par $\mu' = a \cdot \mu = Ad^*(a)\,\mu + cocs(a)$
- des fibrés principaux de groupe structural G :
  - $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$ un fibré principal de repères f
  - $\hat{\pi} : \mathfrak{g}^* \times \mathcal{F} \to (\mathfrak{g}^* \times \mathcal{F})/G$ le fibré des couples (μ, f)
- $\tilde{\Gamma}$ un champ de 1-formes de connexion sur $\mathcal{F}$
- $\omega = \frac{1}{2}\, d\mu \wedge \tilde{\Gamma}$ un champ de 2-formes

Alors :

♢ la restriction $\psi_{\boldsymbol{\mu}}$ à l'orbite $\boldsymbol{\mu} = orb(\mu, f)$ de la projection $\mathfrak{g}^* \times \mathcal{F} \to \mathfrak{g}^* : (\mu, f) \mapsto \mu$ est une submersion

♡ sur chaque orbite, ω est l'image réciproque par $\psi_{\boldsymbol{\mu}}$ de la forme symplectique du théorème de **Kirillov-Kostant-Souriau** et G est un **groupe symplectique** pour ω

♠ $\psi_{\boldsymbol{\mu}}$ est une **application-moment** et : $\psi_{\boldsymbol{\mu}} \circ L_a = Ad^*(a)\,\psi_{\boldsymbol{\mu}} + cocs(a)$

♣ **Équations du mouvement :**
$d\eta \in Ker(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\nabla}_{dX}\,\mu = d\,\mu + ad^*(\tilde{\Gamma})\mu - dcocs\,(\tilde{\Gamma}) = 0$
$\boldsymbol{\mu} = orb(\mu, f)$ est **transporté par parallélisme** : $\tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$

Algorithme de factorisation

- Rappel des équations du mouvement : $\tilde{\nabla}_{dX}\mu = d\,\mu + ad^*(\tilde{\Gamma})\mu - dcocs\,(\tilde{\Gamma}) = 0$
- Les connexions usuelles sont défini pour une action **à droite** de G sur les composantes : $\mu \cdot a = a^{-1} \cdot \mu$ et, différentiant autour de l'unité, il y a un changement de signe dans l'action infinitésimale de $\mathfrak{g}$: $\mu \cdot Z = -Z \cdot \mu$
- d'où la règle de passage entre les connections usuelles $\tilde{\Gamma}'$ et $\tilde{\Gamma}$:

$$\tilde{\Gamma}' = -\tilde{\Gamma}$$

- et les équations du mouvement deviennent :

$$\boxed{\nabla_{dX}\,\mu = d\,\mu - ad^*(\tilde{\Gamma}')\mu + dcocs\,(\tilde{\Gamma}') = 0}$$

qui généralise les **équations d'Euler-Poincaré** quand la classe de cohomologie symplectique du groupe n'est pas nulle (c'est le cas du groupe de Galilée)

Algorithme de factorisation

Eléments de preuve :

- ♢ $\psi_{\boldsymbol{\mu}}$ est une submersion
- ♡ sur chaque orbite, $\omega = \psi_{\boldsymbol{\mu}}^*(\omega_{KKS})$ et est invariant
  $T_\eta(\mathfrak{g}^* \times \mathcal{F}) = ver_\eta \oplus hor_\eta$ $ver_\eta = Ker\,(D\hat{\pi})$ et $hor_\eta = \mathfrak{g}^* \times hor_f$
  d'où la décomposition unique $d\eta = d\eta_v + d\eta_h$
  avec $d\eta_v = (\tilde{\Gamma}(df)) \cdot \eta$ et $d\eta_h = (\nabla_{dX}\,\mu, hor\,(df))$

  Par linéarité, $\omega(d\eta, \delta\eta) = \omega(d\eta_v, \delta\eta_v) + \omega(d\eta_v, \delta\eta_h) + \omega(d\eta_h, \delta\eta_v) + \omega(d\eta_h, \delta\eta_h)$
  où le dernier terme est nul et :
  - $\omega(d\eta_v, \delta\eta_v) = \frac{1}{2}\,(d\,\mu_v\,\tilde{\Gamma}(Z_\delta \cdot f) - \delta\,\mu_v\,\tilde{\Gamma}(Z_d \cdot f)) = \frac{1}{2}\,(d\,\mu_v\,Z_\delta - \delta\,\mu_v\,Z_d)$
  - $\omega(d\eta_v, \delta\eta_h) = \frac{1}{2}\,(d\mu_v\,\tilde{\Gamma}(\delta f_h) - \delta\mu_h\,\tilde{\Gamma}(Z_d \cdot f)) = -\frac{1}{2}\,\delta\mu_h\,Z_d$
  - $\omega(d\eta_h, \delta\eta_v) = \frac{1}{2}\,d\mu_h\,Z_\delta$

  En résumé : $\omega(d\eta, \delta\eta) = \frac{1}{2}\,(d\,\mu\,Z_\delta - \delta\,\mu\,Z_d)$

$d\mu$ tangent à l'orbite : $d\,\mu = \mu \circ ad\,(Z_d) + (D\,cocs(e))\,Z_d$, d'où :

$$\omega(\delta\eta, d\eta) = \mu\,[Z_d, Z_\delta] + dcocs\,(Z_d, Z_\delta) = \omega_{KKS}(d\mu, \delta\mu)$$

Invariance :

$$L_a^*\,\omega = \frac{1}{2}\,d\,(Ad^*(a)\,\mu + cocs(a)) \wedge Ad\,(a)\,\tilde{\Gamma}) = \frac{1}{2}\,d\mu \wedge (Ad\,(a^{-1})\,Ad\,(a)\,\tilde{\Gamma}) = \omega$$

Algorithme de factorisation

Eléments de preuve :

- $\psi_{\boldsymbol{\mu}}$ est une **application-moment** et : $\psi_{\boldsymbol{\mu}} \circ L_a = Ad^*(a)\,\psi_{\boldsymbol{\mu}} + cocs(a)$
  μ étant son propre moment

$$\iota\,(Z_d \cdot \eta)\,\omega = \iota\,(D\psi_{\boldsymbol{\mu}}(Z_d \cdot \eta))\,\omega_{KKS} = \iota\,(Z_d \cdot \mu)\,\omega_{KKS} = -\,d\,(\mu\,Z_d) = -\,d\,(\psi_{\boldsymbol{\mu}}(\eta)\,Z_d)$$

$\psi_{\boldsymbol{\mu}}$ est une application moment donc

$$\psi_{\boldsymbol{\mu}}(a \cdot \eta) = \psi_{\boldsymbol{\mu}}(a \cdot \mu, a \cdot f) = a \cdot \mu = Ad^*(a)\,\mu + cocs(a) = Ad^*(a)\,\psi_{\boldsymbol{\mu}}(\eta) + cocs(a)$$

- **Équations du mouvement :**
  $d\eta \in Ker(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\nabla}_{dX}\,\mu = d\,\mu + ad^*(\tilde{\Gamma})\mu - dcocs\,(\tilde{\Gamma}) = 0$
  $\boldsymbol{\mu} = orb(\mu, f)$ est **transporté par parallélisme** : $\tilde{\nabla}_{d\vec{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}$
  Les équations du mouvement se déduisent de

$$\forall\,\delta\eta, \qquad (\iota\,(\delta\eta)\,\omega)\,d\eta = \omega(\delta\eta, d\eta) = \frac{1}{2}\,(\delta\mu\,Z_d - d\mu\,Z_\delta) = 0$$

Application au groupe de Galilée : calculant les dérivées covariantes affines

- Pour F :

$$F = F'\,P^{-1} + F_m(C,P) \qquad \Longrightarrow \qquad dF = dF' - F'dP + DF_m(Id)(dC,dP)$$

en $a = Id$ (Identité) avec $da = (\Gamma_A, \Gamma)$

$$\tilde{\nabla} F = dF - F\,\Gamma + DF_c(Id)(\Gamma_A,\Gamma) = \nabla F + DF_c(Id)(\Gamma_A,\Gamma)$$

- De même, pour L :

$$\tilde{\nabla} L = dL + \Gamma\,L - L\,\Gamma\; + \Gamma_A F + DL_c(Id)(\Gamma_A,\Gamma) = \nabla L + \Gamma_A F + DL_c(Id)(\Gamma_A,\Gamma)$$

Application au groupe de Galilée : calculant les dérivées covariantes affines

- Application au groupe de Galilée :

$$\nabla F = dF - F\,\Gamma = \left(-de, dp^T\right) - \left(-e, p^T\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ j(\Omega)\,dx - g\,dt & j(\Omega)\,dt \end{pmatrix}$$

$$\nabla F = \left(-de - p\cdot(\Omega \times dx - g\,dt), (dp + \Omega \times p)^T\right)$$

- Différentiant le cocycle :

$$F_m(C, P) = m\left(-\frac{1}{2}\parallel u \parallel^2, u^T\right)$$

on obtient :

$$(DF_m(e))(\Gamma'_A, \Gamma') = \left(0, m\,du^T\right) = \left(0, m\,(\Omega \times dx - g\,dt)^T\right)$$

- D'où les équations du mouvement :

$$\tilde{\nabla} e = de + p\cdot(\Omega \times dx - g\,dt) = de - p\cdot g\,dt = 0$$

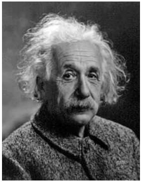
$$\tilde{\nabla} p = dp + \Omega \times p\,dt + m\,(\Omega \times dx - g\,dt) = dp - m\,(g - 2\,\Omega \times v)\,dt = 0$$

Équations du mouvement

- Tous calculs faits, on obtient les équations de conservation de :
  - l'énergie :
  $$\tilde{\nabla} e = de - g \cdot p \, dt = 0$$
  - la quantité de mouvement :
  $$\tilde{\nabla} p = dp + \Omega \times p \, dt + m \, (\Omega \times dx - g \, dt) = dp - m \, (g - 2 \, \Omega \times v) \, dt = 0$$
  - le passage:
  $$\tilde{\nabla} q = dq + \Omega \times (q - m \, x) \, dt - p \, dt = 0$$
  - moment cinétique :
  $$\tilde{\nabla} l = dl + \Omega \times l \, dt - q \times (g \, dt - \Omega \times dx) + p \times (\Omega \times x) \, dt = 0$$

  où les termes supplémentaires dus au cocycle symplectique en rouge
- Les trois dernières équations sont identiques à celles obtenues au chapitre 1 en annullant la dérivée affine du torseur
- On aurait pu obtenir ces résultats par les équations d'Euler-Poincaré généralisées

Application: le cas relativiste



- transformation de Lorentz-Poincaré (auto-adjointe)

$$a = (C, P) \qquad P\,P^* = 1_{\mathbb{R}^4}$$

- tenseur moment Poincaréen

$$F = \begin{pmatrix} -e & p^T \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} q^T \\ -\frac{1}{2} q & -j\left(\frac{1}{2}\, l\right) \end{pmatrix}$$

Composantes affines :
e énergie, p quantité de mouvement, q passage, l moment cinétique

- Quadri-impulsion $\Pi = F^*$
- La classe de cohomologie du cocycle symplectique du groupe de Lorentz-Poincaré est nulle !
- Equations du mouvement

$$\tilde{\nabla}\Pi = d\Pi + \Gamma\Pi = \nabla\Pi = 0$$

$$\tilde{\nabla} L = dL + \Gamma\, M - M\, \Gamma + \Gamma_A \Pi^* - \Pi\, \Gamma_A = \nabla L + \Gamma_A \Pi^* - \Pi\, \Gamma_A = 0$$

Parmi les sujets non évoqués ou non développés

- **chapitre 10 :** Le co-torseur comme tenseur affine ("torseur cinématique")
- **chapitres 10 et 13 :** Principe de Galilée appliqué aux lois de comportement (indifférence matérielle)
- **chapitre 12 :** Principe variationnel d'espace-temps (lois de conservation obtenue par des variations au sens des jets)
- **chapitre 16 :** Mécanique statistique des groupes de Lie & lien avec la thermodynamique des milieux continus ([de Saxcé 2016 Entropy] et actes de la conférence *Geometric Science of Information 2015* (YouTube))
- **chapitre 16 :** Torseurs et moments Bargmanniens

Perspectives

- Outre les torseurs et les moments, il y a un autre type de tenseurs affines utiles pour la mécanique, les **co-torseurs**, en dualité avec les torseurs, conduisant à revisiter la *méthode des puissances virtuelles*
- **Problème ouvert :** quelles sont les équations qui permettent de déterminer les 4 potentiels de la gravitation galiléenne ?
- **Problème ouvert :** Étendre l'algorithme de factorisation aux formes multisymplectiques pour la dynamique des milieux continus de dimension $d = p - 1$ (sur une variété $\mathcal{N}$ de dimension p)

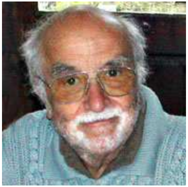
$$\omega = \frac{1}{2}\, d\mu \wedge \tilde{\Gamma}$$

où ω est une $(p+1)$-forme, la connexion $\tilde{\Gamma}$ est toujours une 1-forme et le moment μ est une $(p-1)$-forme

"Les chaussures sont un outil pour marcher;
les mathématiques, un outil pour penser.
On peut marcher sans chaussures, mais on va moins loin."

Jean-Marie Souriau

Grammaire de la Nature (2007)



Co-torseurs

Formes **biaffines** antisymétriques γ définies sur l'espace affine tangent

- Représentation locale :

$$\gamma\,(\boldsymbol{a}, \hat{\boldsymbol{a}}) = \gamma\,(V^\alpha, \hat{V}^\beta) = \Omega_{\alpha\beta} V^\alpha \hat{V}^\beta + A_\alpha\,(V^\alpha - \hat{V}^\alpha)$$

avec $\Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}$.

- Règle tensorielle pour les composantes $(A_\alpha, \Omega_{\alpha\beta})$ du co-torseur γ :

$$A_{\alpha'} = (A_\beta + \Omega_{\beta\mu}\, C^\mu)\, P^\beta_{\alpha'}, \qquad \Omega_{\alpha'\beta'} = P^\mu_{\alpha'} P^\nu_{\beta'} \Omega_{\mu\nu}$$

- **Dualité** entre co-torseurs et torseurs :

$$\gamma(\boldsymbol{\tau}) = A_\alpha\, T^\alpha + \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta} J^{\beta\alpha}$$

- Gradient covariant affine $\tilde{grad}\,\gamma$ d'un co-torseur :

$$_\rho\tilde{\nabla} A_\alpha = {}_\rho\nabla A_\alpha - \Omega_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\nu A\rho} U^\nu \qquad {}_\rho\tilde{\nabla}\Omega_{\alpha\beta} = {}_\rho\nabla\Omega_{\alpha\beta}$$

- permet d'intégrer par partie grâce à :

$$div\,(\gamma(\boldsymbol{\tau})) = \gamma\,(\tilde{div}\boldsymbol{\tau}) + (\tilde{grad}\gamma)(\boldsymbol{\tau})$$

Torseurs bargmanniens

Ils sont structuré comme suit :

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & T^T \\ -T & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m & p^T & \mathcal{L} \\ -m & 0 & -q^T & -\alpha \\ -p & q & -j(l) & w \\ -\mathcal{L} & \alpha & -w & 0 \end{pmatrix}$$

Nouvelles composantes :

- **Lagrangien** $\mathcal{L}$
- **action** α
- **moment de Lagrangien-action** $w = \mathcal{L}\, x - \alpha\, v$