

TD EE MT 2016

Dans tous ces exercices, on se limite à \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne canonique. (\cdot, \cdot) est le produit scalaire et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée. Pour $n = 3$, \wedge est le produit vectoriel. On peut aisément généraliser le cadre de ces exercices à un espace euclidien E quelconque et même pour le second à un espace vectoriel quelconque de dimension finie. Si V est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^n , on note Π_V le projecteur orthogonal sur V .

Exercice 1

Structure de variété de la sphère \mathbb{S}^n de \mathbb{R}^{n+1} .

1. Montrer que la sphère $\mathbb{S}^n = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ est une variété compacte de dimension n . On choisira un pôle dit "pôle nord" noté $N = (0, \dots, 0, 1)$ (resp. son opposé $S = (0, \dots, 0, -1) = -N$) et on note $H = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$ le sous-espace vectoriel "horizontal" équatorial. On posera $U_N = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ (resp. $U_S = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$) et $\psi_N : U_N \rightarrow H$ (resp. $\psi_S : U_S \rightarrow H$) les projections stéréographiques correspondantes et on montrera que les cartes (U_N, ψ_N, H) et (U_S, ψ_S, H) forment un atlas de \mathbb{S}^n . On calculera en particulier les deux seuls changements de cartes de l'atlas $\psi_{NS} = \psi_S \circ \psi_N^{-1} : \psi_N(U_N \cap U_S) \rightarrow \psi_S(U_N \cap U_S)$ et $\psi_{SN} = \psi_N^{-1} \circ \psi_S^{-1} : \psi_S(U_S \cap U_N) \rightarrow \psi_N(U_S \cap U_N)$.
2. Proposer un autre atlas de \mathbb{S}^n . Celui à deux cartes est le plus petit possible. Pourquoi?
3. Montrer directement que \mathbb{S}^n est aussi une sous-variété de \mathbb{R}^{n+1} .
4. Soit $a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{S}^n$. Calculer l'espace tangent $T_a \mathbb{S}^n$ de \mathbb{S}^n en a .

Exercice 2

Soit $m \leq n$ et $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension m de \mathbb{R}^n . Le but de l'exercice est de munir cet ensemble d'une structure de variété appelée Grassmannienne (des m -plans de \mathbb{R}^n).

1. Que valent $\mathbb{G}_{0,n}(\mathbb{R}), \mathbb{G}_{n,n}(\mathbb{R}), \mathbb{G}_{1,n}(\mathbb{R})$?
2. Structure métrique sur $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$.
Soient V, W deux sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de même dimension m c'est-à-dire $V, W \in \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$. On pose $d(V, W) = \|\|\Pi_V - \Pi_W\|\|$. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ est compact.
4. Structure de variété sur $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$.
Soit $V \in \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$. On note $U_V = \{W \in \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) \mid W \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n\}$.
 - (a) Montrer que U_V est un ouvert de $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ contenant V .
 - (b) Soit $W \in U_V$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $u_{V,W} \in \mathcal{L}(V, V^\perp)$ telle que $W = \{x + u_{V,W}(x) \mid x \in V\}$.
 - (c) Montrer que $\phi_V : W \mapsto u_{V,W}$ est bijective et en déduire que $(U_V, \phi_V, \mathcal{L}(V, V^\perp))$ est une carte de $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ centrée en V .
 - (d) Calculer les changements de cartes et en déduire que $(U_V, \phi_V, \mathcal{L}(V, V^\perp))_{V \in \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})}$ est un atlas de $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ qui est donc une variété différentiable de dimension $m(n-m)$.
 - (e) Soit $F \in \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$. Calculer l'espace tangent $T_F \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ en F . Montrer qu'il est isomorphe à $\mathcal{L}(F, F^\perp)$.

En fait la structure euclidienne d'un espace vectoriel n'est pas indispensable pour travailler sur les Grassmanniennes de cet espace vectoriel.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de donner une version matricielle (et donc moins géométrique) de l'étude de $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$. On obtiendra en particulier une structure de sous-variété sur $\mathbb{G}_m(\mathbb{R}^n)$. On a remarqué déjà que se donner un sev de \mathbb{R}^n (muni de sa structure euclidienne) c'est équivalent à se donner une projection orthogonale sur ce sev. On identifie donc ici $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec les projecteurs sur les sev de dimension m et, quitte à se placer dans la base canonique de \mathbb{R}^n , on l'identifiera avec le sous ensemble des matrices de projection orthogonale de rang m :

$$\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^2 = A, A^T = A, \text{rang}(A) = m\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^2 = A, A^T = A, \text{tr}(A) = m\}$$

On appelle I_m la matrice diagonale dont les m premiers coefficients diagonaux sont 1 et dont les $n - m$ suivants sont nuls et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on décomposera par blocs A de la manière suivante: $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. Enfin on notera $\mathcal{G}_{l,n,m}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \mid \text{rang}(M) = m\}$

1. Montrer que $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) = \{P^{-1}I_m P \mid P \in O_n(\mathbb{R})\}$.
2. Montrer que $V = \{A \mid \det(B) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. Soit $A \in V$. Montrer que A est de rang m si et seulement si $E - DB^{-1}C = 0$.
3. Soit $\Phi : \mathcal{G}_{l,n,m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'application définie par $\Phi(M) = M(M^T M)^{-1}M^T$. Montrer que $\Phi(M)$ est l'unique matrice de projection orthogonale sur $\text{Im}(\Phi(M)) = \text{Im}M$.
4. Soit $\Psi : \mathcal{M}_{n-m,m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'application définie par $\Psi(M) = \Phi\left(\begin{pmatrix} I_m \\ M \end{pmatrix}\right)$. Calculer $d\Psi$ et en déduire que Ψ est une immersion C^∞ .
5. Montrer que Ψ est injective et que $\Psi(\mathcal{M}_{n-m,m}(\mathbb{R})) = V \cap \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$.
6. Montrer que Ψ en tant qu'application à valeurs dans V est propre et en déduire que $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ est une sous-variété C^∞ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $m(n - m)$.
7. Montrer que $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ est compact.
8. Calculer l'espace tangent $T_{I_m}\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Exercice 4

Le but de cet exercice est d'introduire un troisième type de variété souvent plus facile à manipuler que celui des grassmanniennes $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$. Si $m \leq n$, on identifie une famille $X = (X_1, \dots, X_m)$ de m vecteurs de \mathbb{R}^n avec la matrice notée encore X de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les m vecteurs. L'ensemble $\mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des familles de m vecteurs orthonormés de \mathbb{R}^n . On a donc $\mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R}) = \{X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \mid X^T X = I_m\}$.

1. Que valent $\mathbb{S}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S}_{1,n}(\mathbb{R})$?
2. Montrer que $\mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.
3. Calculer l'espace tangent $T_X\mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R})$ en tout X de $\mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R})$.
4. Quel est le lien entre $\mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$? On pourra utiliser le groupe orthogonal $O_m(\mathbb{R})$.

Remarque: en tant que variétés quotients, on a $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) = GL_{m,n}(\mathbb{R})/GL_m(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R})/O_m(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R})/O_{n-m}(\mathbb{R})$. On en déduit que $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R})/(O_m(\mathbb{R}) \times O_{n-m}(\mathbb{R}))$. On a aussi $\mathbb{G}_{1,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^{n-1}/\{-1, 1\}$: \mathbb{S}^{n-1} est un revêtement à deux feuillets de $\mathbb{G}_{1,n}(\mathbb{R})$. En passant aux supplémentaires orthogonaux, il en est de même pour $\mathbb{G}_{n-1,n}(\mathbb{R})$. La relation $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R})/O_m(\mathbb{R})$ se traduit en disant que $\mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R})$ est l'espace total d'un espace fibré principal de fibre $O_n(\mathbb{R})$ et de base $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Exercice 5

Le but de cet exercice est d'utiliser les structures de variétés définies précédemment pour poser et résoudre un problème de stabilité de structure. Soit Σ une structure mécanique discrète, $M = S^2$ sa matrice de masse (avec S la racine carrée de M) et $K = K(p)$ sa matrice de rigidité. On pose $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n est $S^{-1}KS^{-1}$. u caractérise la dynamique linéaire de Σ . Si F est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^n , on pose $u_F = \Pi_F \circ u|_F \in \mathcal{L}(F)$ qui s'appelle le compressé de u sur F . Imposer des contraintes cinématiques à Σ est équivalent à étudier le compressé u_F où F est orthogonal au sev engendré par les contraintes. La stabilité par flottement est analysée ici par l'existence ou pas de valeur propre multiple de l'opérateur associé. La question est la suivante. On suppose u à valeurs propres simples donc diagonalisable. Existe-t-il des contraintes cinématiques qui rendraient u_F avec des valeurs propres multiples source de non diagonalisabilité et donc de perte de stabilité par flottement. On se place dans le cadre minimal en termes de dimension: $n = 3$ et $m = 2$ c'est-à-dire: existe-t-il une contrainte cinématique déstabilisant par flottement un système stable du point de vue du flottement?

Pour rendre concret les choses voici un système de Ziegler Σ à trois barres OA, AB, BC avec $OA = AB = AC = \ell$ et soumis à la force suiveuse \vec{P} . Il est donc à trois ddl (paramétré par les trois angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ comme sur la figure 1) et on étudie dans le cadre linéaire la stabilité par flottement de l'unique position d'équilibre $q^e = (0, 0, 0)$. Il y a à chaque liaison un ressort élastique de même raideur k . Le paramètre adimensionnel est $p = \frac{P\ell}{k}$. La matrice de rigidité est:

$$K(p) = \begin{bmatrix} 2-p & -1 & p \\ -1 & 2-p & -1+p \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de masse dépend de la répartition. Par exemple, pour une répartition uniforme de masse, on obtient une charge critique d'instabilité par flottement $p_{fl}^* = 1.484$. La question qui se pose est de savoir, si en imposant une contrainte cinématique $C = \{c \in \mathbb{R}^3\}$ à Σ (ce nouveau système contraint sera noté Σ_C) la charge critique de flottement $p_{C,fl}^*$ de Σ_C est plus petite ou plus grande que p_{fl}^* .

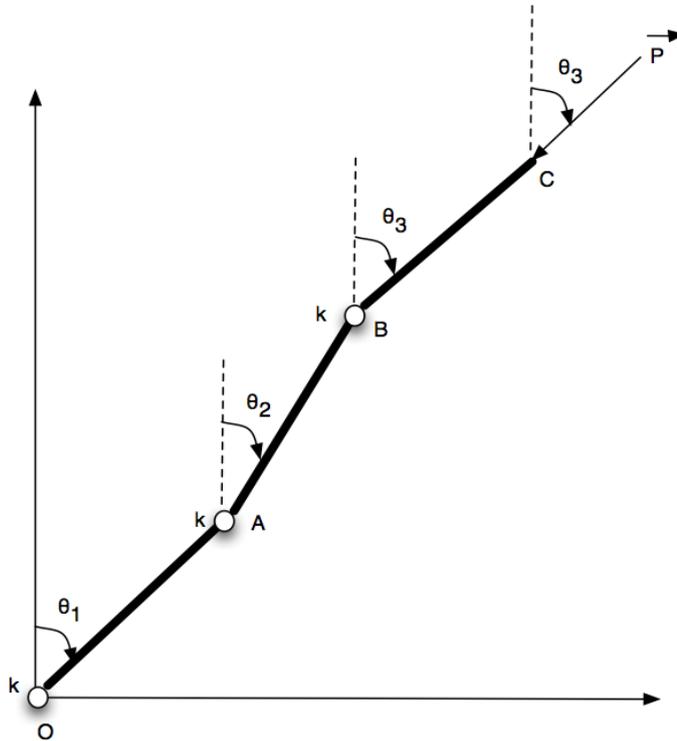


Figure 1: Système de Ziegler à 3 ddl

1. Montrer que

$$\min_{F \in \mathbb{G}_{2,3}(\mathbb{R})} \text{tr}^2(u_F) - 4 \det(u_F) > 0 \quad (1)$$

assure la stabilité par flottement de tout système contraint. Que pensez vous de l'existence de ce minimum?

2. Poser le problème de manière équivalente avec $\mathbb{S}_{2,3}(\mathbb{R})$ et \mathbb{S}^2 . Si $(e_1, e_2) \in \mathbb{S}_{2,3}$ on appellera $F_{(e_1, e_2)} \in \mathbb{G}_{2,3}(\mathbb{R})$ le sev engendré par e_1 et e_2 et $e_3 = e_1 \wedge e_2 \in \mathbb{S}^2$.
3. On pose $\Phi : \mathbb{G}_{2,3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\Phi(F) = \text{tr}^2(u_F) - 4 \det(u_F)$ la fonction que l'on cherche à minimiser sur $\mathbb{G}_{2,3}(\mathbb{R})$. Calculer les fonctions ϕ et ψ définies respectivement sur $\mathbb{S}_{2,3}(\mathbb{R})$ et \mathbb{S}^2 associées au même problème.
4. Calculer les différentielles $d\phi((e_1, e_2)) \in \mathcal{L}(T_{(e_1, e_2)}\mathbb{S}_{2,3}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ et $d\psi(e_3) \in \mathcal{L}(T_{e_3}\mathbb{S}^2, \mathbb{R})$.
5. Trouver les conditions nécessaires d'extrémalité pour ψ et pour θ .
6. Montrer qu'elles sont équivalentes. Laquelle est la plus "simple"?

On remarquera que pour $n \geq 4$ et $m < n - 1$ le passage par le calcul différentiel sur la sphère n'est plus opérant et que le calcul sur les variétés Grassmannienne ou de Stiefel est indispensable.

TD EE MT 2016. Eléments de correction.

Exercice 1

Structure de variété de la sphère \mathbb{S}^n de \mathbb{R}^{n+1} .

1. \mathbb{S}^n est bien évidemment compacte (fermée et bornée). On prend les notations de l'exercice. Calculons par exemple ψ_N . Soit $x = (x_0, \dots, x_n) \in U_N$. Alors, $\psi_N(x) = y$ est tel que $y \in H$ et $x - N$ colinéaire à $y - x$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = x + \lambda(x - N)$ et $y_n = 0$. On a donc la famille d'équations $0 = x_n + \lambda(x_n - 1)$ et $y_k = x_k + \lambda x_k$ si $k = 0, \dots, n-1$. On en déduit l'expression analytique de ψ_N :

$$\begin{aligned} \pi_N : U_N \subset \mathbb{S}^n &\rightarrow \psi_N(U_N) \subset H : \\ x = (x_0, \dots, x_n) &\mapsto \left(x_0 + \frac{x_0 x_n}{1 - x_n}, \dots, x_{n-1} + \frac{x_{n-1} x_n}{1 - x_n}, 0\right) \\ &\mapsto \left(\frac{x_0}{1 - x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1 - x_n}, 0\right) \end{aligned}$$

De même, on trouve:

$$\begin{aligned} \psi_S : U_S \subset \mathbb{S}^n &\rightarrow \psi_S(U_S) \subset H \\ x = (x_0, \dots, x_n) &\mapsto \left(\frac{x_0}{1 + x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1 + x_n}, 0\right) \end{aligned}$$

Soit $y = (y_0, \dots, y_{n-1}, 0) \in H$. Si $y \in \psi_N(U_N)$ alors il existe un unique $x \in U_N$ tel que $y = \psi_N(x)$. Les équations reliant y à x sont $x_k = y_k(1 - x_n)$ pour $k = 0, \dots, n-1$. Or $x \in \mathbb{S}^n$ donc $\|x\|^2 = 1$. On en déduit $(1 - x_n)^2 \|y\|^2 + x_n^2 = 1$ soit $(1 - x_n)^2 \|y\|^2 = 1 - x_n^2$. Comme $x_n \neq 1$, on en déduit $(1 - x_n) \|y\|^2 = 1 + x_n$ soit $x_n = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}$. On en déduit l'expression de ψ_N^{-1} :

$$\begin{aligned} \psi_N^{-1} : \psi_N(U_N) \subset H &\rightarrow U_N \subset \mathbb{S}^n \\ y = (y_0, \dots, y_{n-1}, 0) &\mapsto \left(\frac{2y_0}{\|y\|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_{n-1}}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

De même, on trouve:

$$\begin{aligned} \psi_S^{-1} : \psi_S(U_S) \subset H &\rightarrow U_S \subset \mathbb{S}^n \\ y = (y_0, \dots, y_{n-1}, 0) &\mapsto \left(\frac{2y_0}{\|y\|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_{n-1}}{\|y\|^2 + 1}, \frac{1 - \|y\|^2}{1 + \|y\|^2}\right) \end{aligned}$$

On remarque que $\psi_N(U_N) = \psi_S(U_S) = H$ et que $\psi_N(U_N \cap U_S) = \psi_S(U_S \cap U_N) = H \setminus \{0\}$. Les changements de cartes sont alors données formellement par:

$$\begin{aligned} \psi_{NS} = \psi_{SN} : H \setminus \{0\} &\rightarrow H \setminus \{0\} \\ y = (y_0, \dots, y_{n-1}, 0) &\mapsto \left(\frac{y_0}{\|y\|^2}, \dots, \frac{y_{n-1}}{\|y\|^2}, 0\right) \end{aligned}$$

2. Pour tout $k = 0, \dots, n$ et $\epsilon \in \{-1, 1\}$, on pose $U_{k,\epsilon} = \{x = (x_0, \dots, x_n) \mid \epsilon x_k > 0\}$ et on définit $\psi_{k,\epsilon} : U_{k,\epsilon} \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $\psi_{k,\epsilon}(x) = (x_0, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_n)$. $(U_{k,\epsilon}, \psi_{k,\epsilon})_{k \in \{1, \dots, n\}, \epsilon \in \{-1, 1\}}$ est un atlas à $2(n+1)$ cartes. On ne peut pas recouvrir la sphère \mathbb{S}^n par une seule carte car elle est compacte donc en particulier fermée.
3. L'application $t : x \mapsto t(x) = \|x\|^2$ est une submersion de rang 1 sur $U = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et sa différentielle vaut $h \mapsto dt(x)(h) = \sum_{k=0}^n x_k h_k = (x|h)$. D'après les théorèmes du cours, $\mathbb{S}^n = t^{-1}(\{1\})$ est une sous-variété de dimension $n-1$ de \mathbb{R}^{n+1} .

4. Soit $a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{S}^n$. D'après ce qui précède, on conclut aussi que

$$T_a \mathbb{S}^n = \ker dt(a) = \{h \in \mathbb{R}^{n+1} | (a|h) = 0\} = a^\perp$$

Exercice 2

Soit $m \leq n$ et $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension m de \mathbb{R}^n . Le but de l'exercice est de munir cet ensemble d'une structure de variété appelée Grassmannienne (des m -plans de \mathbb{R}^n).

1. Bien sûr, $\mathbb{G}_{0,n}(\mathbb{R}) = \{0\}$ et $\mathbb{G}_{n,n}(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R}^n\}$. Ce sont donc deux variétés de dimension 0! $\mathbb{G}_{1,n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^n est appelé l'espace projectif de \mathbb{R}^n et on le note $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$.

2. Structure métrique sur $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Soient V, W deux sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de même dimension m c'est-à-dire $V, W \in \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$. On pose $d(V, W) = \|\Pi_V - \Pi_W\|$. On rappelle que $\|\cdot\|$ est la norme subordonnée des applications linéaires.

On a bien sûr $d(V, W) = d(W, V) \quad \forall V, W \in \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$. Supposons $d(V, W) = 0$ si et seulement si $V = W$. Supposons donc que $d(V, W) = 0$ (la réciproque est évidente) et montrons que $V \subset W$ et on conclura alors par symétrie du problème. On a $\Pi_V = \Pi_W$ et si $v \in V$ alors $\Pi_W(v) = v$ donc $v \in W$. Enfin, l'inégalité triangulaire pour d se déduit immédiatement de celle de $\|\cdot\|$.

3. Soit $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on choisit $b_k = (e_{1,k}, \dots, e_{m,k})$ une base orthonormée de V_k . Rappelons que l'on a alors $\Pi_{V_k} = \sum_{i=1}^m (\cdot | e_{i,k}) e_{i,k}$. En tant que suite dans le compact $(\mathbb{S}^1)^m$, on peut en extraire une sous-suite convergente $b_{\phi(k)} = (e_{1,\phi(k)}, \dots, e_{m,\phi(k)})$ vers $b^* = (e_1^*, \dots, e_m^*)$. Alors $(\Pi_{V_{\phi(k)}})_k$ tend vers Π_{V^*} c'est-à-dire $(V_{\phi(k)})_k$ converge dans $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ vers V^* engendré par b^* .

4. Structure de variété sur $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Soit $V \in \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$. On note $U_V = \{W \in \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) | W \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n\}$.

(a) Comme $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$, U_V contient V . Faire un dessin pour voir que c'est un ouvert.

(b) Soit $W \in U_V$. Soit $y \in W$. Puisque $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$, il existe un unique $(x, u_{V,W}(x)) \in V \times V^\perp$ tel que $y = x + u_{V,W}(x)$. $u_{V,W}$ est bien définie car $W \in U_V$ et est linéaire de V vers V^\perp par unicité de l'écriture dans $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$.

(c) $\phi_V : W \mapsto u_{V,W}$ est bijective d'inverse $\phi_V^{-1} : u \mapsto (id + u)(V)$. $(U_V, \phi_V, \mathcal{L}(V, V^\perp))$ est donc une carte de $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ centrée en V .

(d) Soient V_1 et V_2 deux éléments de $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $(U_{V_1}, \phi_{V_1}, \mathcal{L}(V_1, V_1^\perp))$ et $(U_{V_2}, \phi_{V_2}, \mathcal{L}(V_2, V_2^\perp))$ les deux cartes associées. La fonction de transition $\phi_{V_2} \circ \phi_{V_1}^{-1}$ est définie sur l'ouvert $\phi_{V_1}(U_{V_1} \cap U_{V_2})$ de $\mathcal{L}(V_1, V_1^\perp)$ lui-même défini par:

$$\phi_{V_1}(U_{V_1} \cap U_{V_2}) = \{u \in \mathcal{L}(V_1, V_1^\perp) | (id + u)(V_1) \oplus V_2^\perp = \mathbb{R}^n\}$$

Soit maintenant $u_1 \in \phi_{V_1}(U_{V_1} \cap U_{V_2}) \subset \mathcal{L}(V_1, V_1^\perp)$ et soit $x \in V_2$.

Comme $(id + u_1)(V_1) \oplus V_2^\perp = \mathbb{R}^n$, il existe un vecteur unique noté $\phi_{V_2} \circ \phi_{V_1}^{-1}(u_1)(x)$ tel que

$$x = (id + u_1)(x) + \phi_{V_2} \circ \phi_{V_1}^{-1}(u_1)(x) = x + u_1(x) + \phi_{V_2} \circ \phi_{V_1}^{-1}(u_1)(x) \quad (1)$$

On vérifie alors que $\phi_{V_2} \circ \phi_{V_1}^{-1}(u_1)$ qui va bien de V_2 dans V_2^\perp est bien linéaire (c'est-à-dire $\in \mathcal{L}(V_2, V_2^\perp)$) et que $u_1 \mapsto \phi_{V_2} \circ \phi_{V_1}^{-1}(u_1)$ est différentiable et même analytique entre les deux espaces de Banach de même dimension $m(n-m)$ que sont $\mathcal{L}(V_1, V_1^\perp)$ et $\mathcal{L}(V_2, V_2^\perp)$. En effet, écrites dans des bases, les équations (1) définissant $\phi_{V_2} \circ \phi_{V_1}^{-1}(u_1)$ sont solutions d'un système de Cramer et donc sont analytiques (ce sont des quotients de déterminants eux-mêmes polynomiaux). On en déduit que $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ est une variété différentiable et même analytique de dimension $m(n-m)$.

- (e) Soit $F \in \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$. L'espace tangent $T_F \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par la différentielle de ϕ_F en F (qui est une application linéaire bijective de l'espace tangent en F à la Grassmannienne sur l'espace tangent en $\phi_F(F)$ à $\mathcal{L}(F, F^\perp)$): $T_F \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) = d\phi_F(F)^{-1}(T_{\phi_F(F)} \mathcal{L}(F, F^\perp))$. Or $T_{\phi_F(F)} \mathcal{L}(F, F^\perp)$ est naturellement isomorphe et identifié avec $\mathcal{L}(F, F^\perp)$ lui-même qui est un espace vectoriel fixe. Donc $T_F \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) = d\phi_F(F)^{-1}(\mathcal{L}(F, F^\perp)) \approx \mathcal{L}(F, F^\perp)$

Exercice 3

Le but de cet exercice est de donner une version matricielle (et donc moins géométrique) de l'étude de $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$. On obtiendra en particulier une structure de sous-variété sur $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$. On a remarqué déjà que se donner un sev de \mathbb{R}^n (muni de sa structure euclidienne) c'est équivalent à se donner une projection orthogonale sur ce sev. On identifie donc ici $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec les projecteurs sur les sev de dimension m et, quitte à se placer dans la base canonique de \mathbb{R}^n , on l'identifiera avec le sous ensemble des matrices de projection orthogonale de rang m :

$$\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^2 = A, A^T = A, \text{rang}(A) = m\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^2 = A, A^T = A, \text{tr}(A) = m\}$$

On appelle I_m la matrice diagonale dont les m premiers coefficients diagonaux sont 1 et dont les $n - m$ suivants sont nuls et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on décomposera par blocs A de la manière suivante: $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. Enfin on notera $\mathcal{G}_{l_{n,m}}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \mid \text{rang}(M) = m\}$

- Autrement dit, $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ est l'orbite de I_m sous l'action de $O_n(\mathbb{R})$ ce qui est évident car toute matrice de $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$ étant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée et son spectre est $\{0, 1\}$ car c'est une matrice de projecteur.
- C'est l'image réciproque d'un ouvert (\mathbb{R}^*) par une application continue donc V est un ouvert de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. Soit maintenant $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \in V$. Donc B est inversible. L'astuce consiste effectuer le produit suivant par blocs:

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -D & I_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & B^{-1}C \\ 0 & E - DB^{-1}C \end{pmatrix}$$

Or les deux matrices de gauche dans le produit ci-dessus sont clairement inversibles donc en multipliant par ces matrices, on conserve le rang initial de la matrice A c'est-à-dire m . Mais la matrice finale est clairement de rang m si et seulement si $E - DB^{-1}C = 0$.

- Soit $\Phi : \mathcal{G}_{l_{n,m}}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'application définie par $\Phi(M) = M(M^T M)^{-1} M^T$. $M^T \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ donc $M^T M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est clairement de rang m donc inversible. Un calcul immédiat montre que $\Phi(M)^2 = \Phi(M)$ et que $\Phi(M)^T = \Phi(M)$. De plus, on a $\text{rang}(\Phi(M)) = \text{rang} M$. Enfin il est clair que $\text{Im } \Phi(M) \subset \text{Im } M$ et donc que $\text{Im } \Phi(M) = \text{Im } M$ pour des raisons de dimension.
- Soit $\Psi : \mathcal{M}_{n-m,m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'application définie par $\Psi(M) = \Phi\left(\begin{pmatrix} I_m \\ M \end{pmatrix}\right)$. Le calcul donne:

$$\Psi(M) = \begin{pmatrix} Q(M) & Q(M)M^T \\ MQ(M) & MQ(M)M^T \end{pmatrix}$$

avec $Q(M) = (I_m + M^T M)^{-1} \in \mathcal{G}_{l_{m,m}}(\mathbb{R})$. Ψ est clairement C^∞ et si $H \in \mathcal{M}_{n-m,m}(\mathbb{R})$, on a donc:

$$d\Psi(M)(H) = \begin{pmatrix} dQ(M)(H) & dQ(M)(H)M^T + Q(M)H^T \\ HQ(M) + MdQ(M)(H) & HQ(M)M^T + MdQ(M)(H)M^T + MQ(M)H^T \end{pmatrix}$$

Soit $H \in \ker d\Psi(M)$. Alors $dQ(M)(H) = 0$, $dQ(M)H^T + Q(M)H^T = 0$, $HQ(M) + MdQ(M)(H) = 0$, $HQ(M)M^T + MdQ(M)(H)M^T + MQ(M)H^T = 0$. On en déduit que $HQ(M) = 0$ et donc $H = 0$ car $Q(M)$ est inversible. $d\Psi(M)$ est donc injective et donc Ψ est une immersion.

- Soient $M, N \in \mathcal{M}_{n-m,m}(\mathbb{R})$ telles que $\Psi(M) = \Psi(N)$. On en déduit en particulier que $Q(M) = Q(N)$ et $MQ(M) = NQ(N)$ d'où $MQ(M) = NQ(M)$ et donc $M = N$ car $Q(M)$ est inversible. Enfin, $MQ(M)M^T - MQ(M)Q(M)^{-1}Q(M)M^T = MQ(M)M^T - MQ(M)M^T = 0$. D'après, la question 2), on en déduit que $\Psi(\mathcal{M}_{n-m,m}(\mathbb{R})) = V \cap \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$.

6. L'image réciproque par Ψ d'un compact $\subset V$ est clairement compact donc Ψ est propre. Un théorème classique sur les variétés dit que l'image d'une sous-variété \mathcal{C}^p par une application immersion \mathcal{C}^p injective propre est une sous-variété \mathcal{C}^p de même dimension. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n-m,m}(\mathbb{R})$ est une variété \mathcal{C}^∞ de dimension $m(n-m)$. Donc d'après ce qui précède, $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) \cap V$ est une sous-variété \mathcal{C}^∞ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $m(n-m)$. En faisant agir les matrices de permutation convenables à gauche P_σ et à droite $P_{\sigma'}$, on transpose ce que l'on vient de faire sur $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) \cap V$ sur $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) \cap V_{\sigma,\sigma'}$. On en a bien sûr qu'un nombre fini pour recouvrir tout $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$.
7. De la question 1 et du fait que $O_n(\mathbb{R})$ est compact, on déduit le résultat demandé.
8. On va calculer $T_{I_m}\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$. C'est l'image par $d\Psi(0)$ de $T_0\mathcal{M}_{n-m,m}(\mathbb{R})$ que l'on identifie avec $\mathcal{M}_{n-m,m}(\mathbb{R})$ lui-même. Or

$$d\Psi(0)(H) = \begin{pmatrix} dQ(0)(H) & Q(0)H^T \\ HQ(0) & 0 \end{pmatrix}$$

Or $Q(0) = I_m$ et $dQ(0) = 0$ donc

$$d\Psi(0)(H) = \begin{pmatrix} 0 & H^T \\ H & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$T_{I_m}\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & H^T \\ H & 0 \end{pmatrix} \mid H \in \mathcal{M}_{n-m,m}(\mathbb{R}) \right\}$$

Exercice 4

Le but de cet exercice est d'introduire un troisième type de variété souvent plus facile à manipuler que celui des grassmanniennes $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$. Si $m \leq n$, on identifie une famille $X = (X_1, \dots, X_m)$ de m vecteurs de \mathbb{R}^n avec la matrice notée encore X de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les m vecteurs. L'ensemble $\mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des familles de m vecteurs orthonormés de \mathbb{R}^n . On a donc $\mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R}) = \{X \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \mid X^T X = I_m\}$.

- $\mathbb{S}_{n,n}(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S}_{1,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^{n-1}(\mathbb{R})$
- L'application $\phi : X \mapsto X^T X$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est clairement \mathcal{C}^∞ . Montrons qu'elle est de rang constant $r = \frac{1}{2}m(m+1)$. Le théorème classique de géométrie différentielle donnera la réponse à la question.
 $d\phi(X)(H) = X^T H + H^T X$ et donc $\ker d\phi(X) = \{H \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \mid H^T X \in \mathcal{A}_m(\mathbb{R})\}$. Le nombre d'équations décrivant $\ker d\phi(X)$ est $r = \frac{1}{2}m(m+1)$. On en déduit donc que $\mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de dimension $nm - \frac{1}{2}m(m+1)$.
- Le cours donne $T_X\mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R}) = \ker d\phi(X) = \{H \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \mid H^T X \in \mathcal{A}_m(\mathbb{R})\}$
- Comme le précise la remarque suivante, $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R})/O_m(\mathbb{R})$ tout simplement car se donner un sev F de dimension m c'est équivalent à se donner n'importe quelle base orthonormée X de ce sev. F peut donc être vu comme la classe d'équivalence de toutes ses bases orthonormées pour la relation d'équivalence suivante: $X \sim X'$ si et seulement si il existe $A \in O_m(\mathbb{R})$ tel que $X' = A \bullet X$ où l'action \bullet de $O_m(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R})$ signifie $A \bullet (X_1 \dots X_m) = (AX_1 \dots AX_m)$. On remarque aussi que l'on retrouve bien la valeur des dimensions car (on se souvient que $O_m(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie de dimension $\frac{1}{2}m(m-1)$) $\dim \mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R})/O_m(\mathbb{R}) = nm - \frac{1}{2}m(m+1) - \frac{1}{2}m(m-1) = nm - \frac{1}{2}m(m+1+m-1) = nm - m^2 = m(n-m) = \dim \mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Remarque: en tant que variétés quotients, on a $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) = GL_{m,n}(\mathbb{R})/GL_m(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R})/O_m(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S}_{m,n}(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R})/O_{n-m}(\mathbb{R})$. On en déduit que $\mathbb{G}_{m,n}(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R})/(O_m(\mathbb{R}) \times O_{n-m}(\mathbb{R}))$. On a aussi $\mathbb{G}_{1,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^{n-1}/\{-1, 1\}$: \mathbb{S}^{n-1} est un revêtement à deux feuilletés de $\mathbb{G}_{1,n}(\mathbb{R})$. En passant aux supplémentaires orthogonaux, il en est de même pour $\mathbb{G}_{n-1,n}(\mathbb{R})$.

Exercice 5

Le but de cet exercice est d'utiliser les structures de variétés définies précédemment pour poser et résoudre un problème de stabilité de structure. Soit Σ une structure mécanique discrète, $M = S^2$ sa matrice de masse (avec S la racine carrée de M) et $K = K(p)$ sa matrice de rigidité. On pose $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n est $S^{-1}KS^{-1}$. u caractérise la dynamique linéaire de Σ . Si F est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^n , on pose $u_F = \Pi_F \circ u|_F \in \mathcal{L}(F)$ qui s'appelle le compressé de u sur F . Imposer des contraintes cinématiques à Σ est équivalent à étudier le compressé u_F où F est orthogonal au sev engendré par les contraintes. La stabilité par flottement est analysée ici par l'existence ou pas de valeur propre multiple de l'opérateur associé. La question est la suivante. On suppose u à valeurs propres simples donc diagonalisable. Existe-t-il des contraintes cinématiques qui rendraient u_F avec des valeurs propres multiples source de non diagonalisabilité et donc de perte de stabilité par flottement. On se place dans le cadre minimal en termes de dimension: $n = 3$ et $m = 2$ c'est-à-dire: existe-t-il une contrainte cinématique déstabilisant par flottement un système stable du point de vue du flottement?

Pour rendre concret les choses voici un système de Ziegler Σ à trois barres OA, AB, BC avec $OA = AB = AC = \ell$ et soumis à la force suiveuse \vec{P} . Il est donc à trois ddl (paramétré par les trois angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ comme sur la figure 1) et on étudie dans le cadre linéaire la stabilité par flottement de l'unique position d'équilibre $q^e = (0, 0, 0)$. Il y a à chaque liaison un ressort élastique de même raideur k . Le paramètre adimensionnel est $p = \frac{P\ell}{k}$. La matrice de rigidité est:

$$K(p) = \begin{bmatrix} 2 - p & -1 & p \\ -1 & 2 - p & -1 + p \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de masse dépend de la répartition. Par exemple, pour une répartition uniforme de masse, on obtient une charge critique d'instabilité par flottement $p_{fl}^* = 1.484$. La question qui se pose est de savoir, si en imposant une contrainte cinématique $\mathcal{C} = \{c \in \mathbb{R}^3\}$ à Σ (ce nouveau système contraint est noté $\Sigma_{\mathcal{C}}$) la charge critique de flottement $p_{\mathcal{C}, fl}^*$ de $\Sigma_{\mathcal{C}}$ est plus petite ou plus grande que p_{fl}^* .

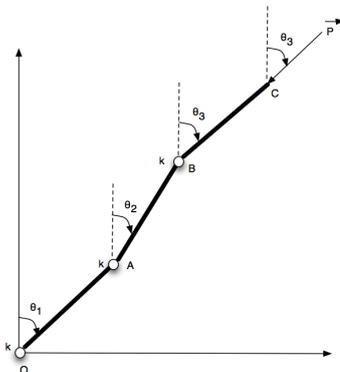


Figure 1: Système de Ziegler à 3 ddl

1. Si on impose une contrainte notée $c \in \mathbb{R}^3$ alors la dimension de l'orthogonal à cette contrainte $F = c^\perp$ est 2. Si le compressé de u sur F est noté u_F alors la stabilité par flottement correspond au fait que u_F reste \mathbb{R} -diagonalisable. Or le polynôme caractéristique de u_F a pour discriminant $\text{tr}^2(u_F) - 4 \det(u_F)$. Donc si $\text{tr}^2(u_F) - 4 \det(u_F) > 0$ la stabilité par flottement du système contraint associé est assurée. Or balayer toutes les contraintes possibles c'est aussi balayer tous les sev F de dimension 2 de \mathbb{R}^3 c'est -à-dire faire parcourir $\mathbb{G}_{2,3}(\mathbb{R})$ à F d'où le résultat. Puisque $\mathbb{G}_{2,3}(\mathbb{R})$ est compact, ce minimum est atteint pour un certain F^* c'est à -dire pour une contrainte $\mathcal{C}^* = \{c \in (F^*)^\perp\}$
2. En fait, le vecteur $c \in \mathbb{R}^3$ définissant une contrainte \mathcal{C} n'a pas d'importance: la seule chose qui importe est la droite engendrée par c ce qui veut dire que $\mathcal{C} \in \mathbb{G}_{1,3}(\mathbb{R}) = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est un élément

de l'espace projectif de \mathbb{R}^3 . On décide donc de faire un choix (modulo l'action de groupes que l'on précisera par la suite) d'une base orthonormée $(e_1, e_2) \in \mathbb{S}_{2,3}$ de $F_{(e_1, e_2)} = c^\perp \in \mathbb{G}_{2,3}(\mathbb{R})$ puis $e_3 = e_1 \wedge e_2 \in \mathbb{S}^2$ sera le vecteur qui définit la contrainte correspondante. Ce choix arbitraire sera contrôlé par l'action de $O_2(\mathbb{R})$ sur les couples de vecteurs orthonormés et par l'action de $\{1, -1\}$ sur les vecteurs de \mathbb{S}^2 .

3. On pose $\Phi : \mathbb{G}_{2,3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\Phi(F) = \text{tr}^2(u_F) - 4 \det(u_F)$ la fonction que l'on cherche à minimiser sur $\mathbb{G}_{2,3}(\mathbb{R})$. Le calcul donne deux expressions possibles de ϕ

$$\Phi(F) = \phi((e_1, e_2)) = 4(u(e_1) | e_2)(u(e_2) | e_1) + ((u(e_1) | e_1) - (u(e_2) | e_2))^2 \quad (2)$$

$$= ((u_s(e_1) | e_1) + (u_s(e_2) | e_2))^2 - 4(u_a(e_1) | e_2)^2 \quad (3)$$

la seconde montrant mieux la compétition entre les parties symétriques et antisymétriques de u . On peut vérifier que c'est indépendant du choix de la base orthonormée dans $F = F_{(e_1, e_2)}$ c'est-à-dire que $\phi((e_1, e_2)) = \phi((e'_1, e'_2))$ si $(e'_1, e'_2) = A \bullet (e_1, e_2)$ est une autre base orthonormée de F . Soit e_3 n'importe lequel des deux vecteurs normés de F^\perp . et supposons pour simplifier que $e_3 \notin \ker u_a$ (Ce cas peut-être traité séparément

On a alors $(F^\perp)^\perp = F$ engendré par $(u_a(e_3), u_a^2(e_3))$ de telle sorte que l'on peut alors choisir $e_1 = \frac{u_a(e_3)}{\|u_a(e_3)\|}, e_2 = e_3 \wedge \frac{u_a(e_3)}{\|u_a(e_3)\|}$.

Posons $\Delta_1(e_3) = \det(e_3, u_a(e_3), u_s(e_3)), \Delta_k(e_3) = \det(e_3, u_a(e_3), u_a^k(e_3))$ pour $k \geq 2$. On trouve alors:

$$\begin{aligned} \Phi(F) = \phi((e_1, e_2)) = \psi(e_3) &= ((u_s(e_1) | e_1) + (u_s(e_2) | e_2))^2 - 4(u_a(e_1) | e_2)^2 \\ &= (\text{Tr}u_s - (u_s(e_3) | e_3))^2 - 4 \left(\frac{u_a^2(e_3) | e_3 \wedge u_a(e_3)}{\|u_a(e_3)\|^2} \right)^2 \\ &= (\text{Tr}u_s - (u_s(e_3) | e_3))^2 - 4 \left(\frac{\Delta_2(e_3)}{\|u_a(e_3)\|^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

On constate là encore que $\psi(e_3) = \psi(-e_3)$ c'est-à-dire que ψ est invariante sous l'action de $\{-1, 1\}$.

4. Soit donc $(e_1, e_2) \in \mathbb{S}_{2,3}(\mathbb{R})$. On trouve:

$$T_{(e_1, e_2)}\mathbb{S}_{2,3}(\mathbb{R}) = \{(\epsilon_1 = se_2 + t_1e_3, \epsilon_2 = -se_1 + t_2e_3) \mid s, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 0 \\ s \\ t_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -s \\ 0 \\ t_2 \end{array} \right) \mid s, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

En effet d'après l'exercice précédent, $H = (\epsilon_1 \quad \epsilon_2) \in T_{(e_1, e_2)}\mathbb{S}_{2,3}(\mathbb{R})$ si et seulement si $H^T(e_1 e_2) \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $H^T(e_1 \quad e_2) = \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} \epsilon_1^T \\ \epsilon_2^T \end{pmatrix} (e_1 \quad e_2) = \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}$ d'où $\epsilon_1^T e_1 = 0, \epsilon_1^T e_2 = s, \epsilon_2^T e_1 = 0, \epsilon_2^T e_2 = 0$ ce qui donne le résultat.

L'espace tangent $T_{e_3}\mathbb{S}^2(\mathbb{R})$ a été calculé dans l'exercice 1 précédent c'est e_3^\perp . On peut noter qu'en utilisant la projection naturelle π de $\mathbb{S}_{2,3}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{G}_{2,3}(\mathbb{R})$ on trouve aussi $T_{\pi(e_1, e_2)}\mathbb{G}_{2,3}(\mathbb{R}) = T_F\mathbb{G}_{2,3}(\mathbb{R}) = d\pi(e_1, e_2)(T_{(e_1, e_2)}\mathbb{S}_{2,3}(\mathbb{R})) = \{(\epsilon_1 = t_1e_3, \epsilon_2 = t_2e_3) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$. Le calcul donne

$$\begin{aligned} d\phi(e_1, e_2)(\epsilon_1, \epsilon_2) &= 2((u_s(e_1) | e_1) + (u_s(e_2) | e_2))(2(u_s(e_1) | \epsilon_1) + 2(u_s(e_2) | \epsilon_2)) \\ &\quad - 8(u_a(e_1) | e_2)((u_a(\epsilon_1) | e_2) + (u_a(\epsilon_2) | e_2)) \quad \text{d'où} \\ d\Phi(\pi((e_1, e_2)))(t_1e_3, t_2e_3) &= 4((u_s(e_1) | e_1) + (u_s(e_2) | e_2))(t_1(u_s(e_1) | e_3) + t_2(u_s(e_2) | e_3)) \\ &\quad - 8(u_a(e_1) | e_2)(t_1(u_a(e_3) | e_2) + t_2(u_a(e_1) | e_3)) \end{aligned}$$

On peut vérifier les invariances nécessaires. Le calcul de $d\psi(e_3)$ devient très compliqué (voir [1]).

5. voir [1]
6. voir [1]
7. voir [1]

On remarquera que pour $n \geq 4$ et $m < n - 1$ le passage par le calcul différentiel sur la sphère n'est plus opérant et que le calcul sur les variétés Grassmannienne ou de Stiefel est indispensable.

References

- [1] J. Lerbet, G. Hello, N. Challamel, F. Nicot, F. Darve, 3-Dimensional Flutter Kinematic Structural Stability Nonlinear Analysis: Real World Applications, <http://dx.doi.org/10.1016/j.nonrwa.2015.10.006>, 2016