

# Application Moment et Théorie de Réduction en Mécanique

Tudor S. Ratiu

Shanghai Jiao Tong University et Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Ce cours présentera un outil très puissant en mécanique géométrique : la théorie de réduction pour les systèmes mécaniques. Tous ces systèmes possèdent une symétrie donnée par l'action d'un groupe de Lie. Si l'espace réduit est singulier, la théorie est encore en développement et le cours donnera les derniers résultats. Les exemples considérés sont en mécanique classique, des milieux continus, et quantique.

**Application moment.** Actions propres des groupes de Lie. Survol de la stratification par les variétés de type orbital. Actions symplectiques. Application moment. Cocycle de Souriau. Exemples. Énoncé du théorème de convexité.

**Réduction Lie-Poisson.** Théorème de réduction Lie-Poisson avec démonstration basée sur l'application moment. Théorème de réduction Lie-Poisson pour les produits semidirects. Réduction par étapes. Exemples : corps rigide libre et pesant, équations d'Euler pour les fluides parfaits incompressibles homogènes et compressibles, fluides à frontière libre, équations d'élasticité. Discussion de la représentation matérielle, spatiale et convective dans la mécanique des milieux continus.

**Réduction symplectique régulière.** Théorème de Marsden-Weinstein de réduction ponctuelle pour les actions symplectiques libres et propres. Exemples : centre de masse, orbites coadjointes. Théorème de réduction orbitale. Lien avec la réduction Poisson et discussion des feuilles symplectiques. Théorème de translation.

**Réduction régulière du fibré cotangent.** Les deux théorèmes de réduction d'un fibré cotangent : plongement et fibration. Connexions principales. Le crochet Lie-Poisson jaugé. Systèmes mécaniques classiques, potentiel effectif.

**Réduction symplectique singulière.** Théorie de réduction pour les actions symplectiques propres, non-libres. Présentation de la stratification symplectique de l'espace réduit. Principe de Sjamaar. Exemple.

**Extension de la théorie.** (si le temps le permet) Différentes extensions de l'application moment : moment optimal, moment cylindrique, moment pour les actions d'un groupe Poisson-Lie. Lien avec la réduction singulière. Espaces de Lie-Poisson Banach et préduel d'une  $W^*$ -algèbre.