$5^{ème}$ Ecole d'Eté de Mécanique Théorique de Quiberon, 11-17 septembre 2016

Mécanique et Thermodynamique galiléenne des milieux continus

Géry de Saxcé

Laboratoire de Mécanique de Lille, FRE CNRS 3723, Université de Lille 1, Cité scientifique, F59655 Villeneuve d'Ascq, France, e-mail: gery.desaxce@univ-lille1.fr

September 11, 2016

1 Chapitre 1 : Gravitation et tenseurs affines en Mécanique galiléenne

1.1 Exercice : systèmes de coordonnées Galiléennes (SCG) et galiléomorphismes

Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice jacobienne d'un changement de coordonnées $X \mapsto X'$ soit une transformation galiléenne linéaire est que ce changement est constitué d'un **déplacement rigide** et d'un changement d'horloge :

$$x' = (R\,(t))^T\,(x - x_0\,(t)), \qquad t' = t + \tau_0 \tag{1}$$

où $t \mapsto R\,(t) \in \mathbb{SO}(3)$ et $t \mapsto x_0(t) \in \mathbb{R}^3$ sont des applications lisses, et $\tau_0 \in \mathbb{R}$. La vitesse d'entraînement est alors de la forme :

$$u = \varpi\,(t) \times (x - x_0\,(t)) + \dot{x}_0\,(t)$$

où ϖ est le vecteur de Poisson de la rotation $R(t)$:

$$\dot{R}R^T = j(\varpi)$$

Indications :

1. La condition est suffisante : simple différentiation de (1).
2. Montrons qu'elle est aussi nécessaire. En effet, le système aux dérivées partielles :
$$\frac{\partial X'}{\partial X} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -R^T u & R^T \end{pmatrix} , \tag{2}$$
où P est une transformation galiléenne linéaire, comporte $(4 \times 4 = 16)$ équations pour 4 inconnues (X'^{α}). Il est surdéterminé et n'a en général pas de solution, sauf si les équations satisfont des conditions de compatibilité. Pour les découvrir, on applique la méthode de Frobenius. Si une solution existe, pour toutes perturbations $d\,X$ et $\delta\,X$, le crochet de Lie des champs de vecteurs $\delta X'$ et dX' s'annulle, ce qui conduit à :
$$[\delta, d]\, X' = \delta(P^{-1})dX - d(P^{-1})\delta X = 0\ .$$
3. Une rotation infinitesimale étant de la forme $\delta\, R = j\,(\delta\,\psi)\, R$ où $\delta\,\psi \in \mathbb{R}^3$, et posant :
$$\delta\,\psi = \frac{\partial\,\psi}{\partial\,x}\,\delta\,x + \frac{\partial\,\psi}{\partial\,t}\,\delta\,t = A\,\delta\,x + \varpi\,\delta\,t,$$
$$\delta\,u = \frac{\partial\,u}{\partial\,x}\,\delta\,x + \frac{\partial\,u}{\partial\,t}\,\delta\,t = B\,\delta\,x + a\,\delta\,t.$$
montrer que les équations de compatibilité sont :
$$Tr\,(A)\,1_{\mathbb{R}^3} = A, \quad j\,(\varpi) = j\,(u)\,A + B.$$
En déduire que R ne dépend que du temps (et pas de la position) et que le boost est de la forme :
$$u = \varpi\,(t) \times x + u_0\,(t)$$
4. Les conditions de compatibilité étant satisfaite, intégrer le système (2).

1.2 Exercice : gravitation galiléenne

◇ Montrer que la loi de transformation d'une connexion linéaire est
$$\Gamma'(U') = P^{-1}(\Gamma(U)\, P + \dot{P})$$

♡ Montrer que dans un changement de coordonnées galilénnes $X' \mapsto X$, la gravitation galiléenne est modifiée suivant la loi :

$$\Omega = R\,\Omega' - \varpi \qquad g - 2\,\Omega \times v = a_t + R\,(g' - 2\,\Omega' \times v')$$

où l'accélération d'entraînement est

$$a_t = \dot{u} + \varpi \times (v - u) = \ddot{x}_0 + \dot{\varpi} \times (x - x_0) + \varpi \times (\varpi \times (x - x_0)) + 2\varpi \times (R\,v')$$

♠ Montrer que dans un changement de coordonnées galilénnes $X' \mapsto X$, la gravité g est modifiée suivant la loi :

$$g = \frac{\partial u}{\partial t} + \varpi \times u + 2\,\Omega \times u + R\,g' = \ddot{x}_0 + \dot{\varpi} \times (x - x_0) + \varpi \times (\varpi \times (x - x_0)) + 2\,\Omega \times u + R\,g'$$

♣ On considère un système de coordonnées galiléennes X' dans lequel $g' = \Omega' = 0$. En l'absence d'autres forces, une particule initiallement au repos le reste au cours du temps. Pour un observateur tournant à un vitesse de rotation constante et, travaillant avec des coordonnées X, on a :

$$x = R(t)x', \qquad x_0 = 0, \qquad \dot{\varpi} = 0$$

Montrer que la gravitation dans le nouveau système de coordonnées est :

$$\Omega = -\varpi, \qquad g = -\varpi \times (\varpi \times x)$$

et vérifier que la loi du mouvement donne :

$$m\dot{v} = m\,\varpi \times (\varpi \times x)$$

Indications :

♢ Développer $\nabla_U\,T = \nabla_U\,(P\,T')$ et utiliser le fait qu'il représente un vecteur tangent.

♡ Appliquer ♢ pour la gravitation galiléenne, ce qui donne :

$$j(\Omega') = j(R^T(\Omega + \varpi)), \qquad \Omega' \times v' - g' = R^T(\Omega \times v - g + \dot{u} + \Omega \times u)$$

En tenant compte de la première relation, transformer la dernière de manière à faire apparaître $g - 2\,\Omega \times v$.

♠ Montrer que l'accélération d'entraînement peut s'écrire :

$$a_t = \frac{\partial u}{\partial t} + \varpi \times (2\,v - u)$$

où le premier terme ne dépend pas de la vitesse v mais seulement de x et t. Introduire cette expression dans la loi de transformation de $g - 2\,\Omega \times v$ et utiliser celle de Ω.

♣ Montrer que la vitesse d'entraînement est $u = \varpi \times x$.

1.3 Exercice : équations du mouvement des corps rigides

À partir de la loi covariante du mouvement :

$$\tilde{\nabla}_U\, \tilde{\tau} = \tilde{\tau}^{\star}$$

établir les équations du mouvement des corps rigides :

$$\dot{m}_{\mathcal{B}} = 0, \qquad \dot{p}_{\mathcal{B}} = m_{\mathcal{B}}\,(g - 2\,\Omega \times \dot{x}_{\mathcal{B}}) + F$$

$$\dot{q}_{\mathcal{B}} = p_{\mathcal{B}}, \qquad \dot{l}_{\mathcal{B}} + \Omega \times l_{0\mathcal{B}} = x_{\mathcal{B}} \times m_{\mathcal{B}}(g - 2\,\Omega \times \dot{x}_{\mathcal{B}}) + M \qquad (3)$$

Indications :

(a) Soit un système de coordonnées X' dans lequel la corps rigide, considéré comme une particule au repos à l'origine (dans lequel le torseur dynamique a sa forme réduite). Dans un autre système de coordonnées $X = PX' + C$ obtenu en appliquant un boost galiléen $\dot{x}_{\mathcal{B}}$ et une translation de l'origine à $k = x_{\mathcal{B}}$ (donc $\tau_0 = 0$ et $R = 1_{\mathbb{R}^3}$), montrer que les composantes du torseur sont :

- la masse : $m_{\mathcal{B}}$,
- la quantité de mouvement: $p_{\mathcal{B}} = m_{\mathcal{B}}\dot{x}_{\mathcal{B}}$,
- le passage : $q_{\mathcal{B}} = m_{\mathcal{B}} x_{\mathcal{B}}$,
- le moment angulaire : $l_{\mathcal{B}} = x_{\mathcal{B}} \times m_{\mathcal{B}}\dot{x}_{\mathcal{B}} + l_{0\mathcal{B}}$.

(b) Montrer que :

$$\Gamma_A(U) = U - \nabla_U C = \begin{pmatrix} 1 \\ -\Omega \times x_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$$

(c) Pour l'établissement des équations (3), montrer que :

$$\tilde{\nabla}\, q_{\mathcal{B}} = \dot{q}_{\mathcal{B}} + \Omega \times (q_{\mathcal{B}} - m_{\mathcal{B}}\, x_{\mathcal{B}}) - p_{\mathcal{B}}\ ,$$

$$\tilde{\nabla}\, l_{\mathcal{B}} = \dot{l}_{\mathcal{B}} + \Omega \times l_{\mathcal{B}} + q_{\mathcal{B}} \times (\Omega \times \dot{x}_{\mathcal{B}} - g) - (\Omega \times x_{\mathcal{B}}) \times p_{\mathcal{B}}\ .$$

Utiliser la décomposition du moment cinétique en moment orbital et moment propre, ainsi que les formules :

$$j(u)j(v) - j(v)j(u) = j(u \times v) = vu^T - uv^T$$

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0 \qquad \text{(identité de Jacobi)}$$

2 Chapitre 2 : Mécanique galiléenne des milieux continus

2.1 Exercice : équations d'Euler des milieux continus

À partir de la loi covariante du mouvement :

$$\tilde{\boldsymbol{Div}}\, \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{0} \tag{4}$$

établir les équations d'Euler des milieux continus :

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(\rho\, v^j) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + f_v^i + \rho\, (g^i - 2\, \Omega^i_j\, v^j).$$

où Ω^i_j sont les éléments de la matrice $j(\Omega)$ et f_v^i les composantes des forces de volumes (autres que la gravitation) .

Indications :

L'équation (4) est structurée en :

$$\tilde{\nabla}_\gamma T^{\beta\gamma} + H^\beta = 0, \qquad \tilde{\nabla}_\gamma J^{\alpha\beta\gamma} + G^{\alpha\beta} = 0$$

Le second groupe conduit à la condition de symétrie $T^{\beta\alpha} = T^{\alpha\beta}$. Il reste à examiner les conséquences du premier groupe, tenant compte de la structure du tenseur de contrainte-masse :

$$T^{00} = \rho, \qquad T^{0j} = T^{j0} = \rho\, v^j, \qquad T^{ij} = \rho\, v^i v^j - \sigma^{ij}\ .$$

Excluant les poussées, les forces de volumes autres que la gravitation sont modelisées par une quadricolonne H de la forme :

$$H^0 = 0, \qquad H^j = -f_v^j \ .$$

En outre, pour la gravitation, les symboles de Christoffel non nuls sont

$$\Gamma_{00}^j = -g^j, \qquad \Gamma_{0k}^j = \Gamma_{k0}^j = \Omega_k^j \ .$$

3 Chapitre 3 : Thermodynamique galiléenne des milieux continus

3.1 Exercice : tenseur moment d'un milieu réversible

Montrer que, en l'absence de gravitation, si ζ est une fonction des déformations de Cauchy à droite $C = F^T F$, du vecteur température W et des coordonnées lagrangiennes, alors la matrice 4×4

$$T_R = U \ \Pi_R + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sigma_R v & \sigma_R \end{pmatrix}$$

avec $\Pi_R = -\rho \ \frac{\partial \zeta}{\partial W} \qquad \sigma_R = -\frac{2\rho}{\beta} \ F \ \frac{\partial \zeta}{\partial C} \ F^T$ est telle que :

- ♢ $Tr \left(\hat{T}_R \nabla \hat{W} \right) = 0$
- ♡ $T_R \ U = -\rho \ \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial W} \ U \right) \ U$,
- ♠ $\hat{T}_R = \begin{pmatrix} T_R & N \end{pmatrix}$ avec $N = \rho U$ représente un tenseur moment $\hat{\boldsymbol{T}}_R$
- ♣ $\hat{T}_R \ \hat{W} = s \, N$ où : $s = \zeta - \dfrac{\partial \zeta}{\partial W} \ W = \zeta_{int} - \beta \ \dfrac{\partial \zeta_{int}}{\partial \beta}$

Indications : Tenant compte de $\hat{T}_R = \begin{pmatrix} T_R & N \end{pmatrix}$, la condition ♢ s'écrit, en l'absence de gravitation :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial X} \ N = -Tr \ (T_R f)$$

Comme ζ est une fonction de C, W et s', on a :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial X} \ N = \rho \frac{d\zeta}{dt} = \rho \ \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s'} \ \frac{ds'}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial W} \ \frac{dW}{dt} + Tr \ \left(\frac{\partial \zeta}{\partial C} \ \frac{dC}{dt} \right) \right)$$

Développer et montrer que cette quantité est égale à $-Tr \ (T_R f)$.

3.2 Exercice : production locale d'entropie

En supposant le premier principe vérifié, on demande :

- Pour un processus réversible, montrer que le quadriflux 4-flux S est de divergence nulle et que l'entropie spécifique s est une intégrale première du mouvement.
- Pour un processus réversible, en déduire que la production d'entropie est nulle :

$$\Phi = \boldsymbol{Div}\ \left(\hat{\boldsymbol{T}}\ \hat{\vec{\boldsymbol{W}}}\right) - \left(\boldsymbol{e}^0(\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{U}}))\right)\ \left(\boldsymbol{e}^0(\boldsymbol{T}_I(\vec{\boldsymbol{U}}))\right) = 0$$

- La production d'entropie prend la forme :

$$\Phi = h \cdot grad\,\beta + \beta\ Tr\ \ (\sigma_I\ D) \geq 0$$

  où interviennent les affinités thermodynamiques $a = grad\ \beta$, $A = \beta\, D$ et les flux thermodynamiques correspondants h, σ_I.

Indications :

(a) Utiliser l'identité valable pour n'importe quel champ de vecteur $v \in \mathbb{R}^p$ et de matrice $A \in \mathbb{M}_{np}$:

$$div\,(A\,v) = (div\ A)\,v + Tr\ \left(A\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\ , \tag{5}$$

et le résultat $\diamondsuit$ de l'exercice 3.1 pour montrer que $div\,S = 0$.

(b) Pour démontrer le dernier point, utiliser (5) et le premier principe pour montrer que :

$$\Phi = Tr\ \left(\hat{T}\ \frac{\partial \hat{W}}{\partial X}\right) - \mathcal{H}_I\,\frac{d\beta}{dt}$$

puis utiliser le résultat $\diamondsuit$ de l'exercice 3.1.